2

導　數

在自然科學與社會科學中，我們最常遇到平均變化率與瞬時變化率，例如：平均速率、平均密度、平均成本等皆屬於平均變化率的範疇，從其字面上的意義，我們很容易可求得某一量之平均變化率。而瞬時變化率乃在求某一瞬間量的變化情況，例如：曲線的**切線斜率**(slope)、車行的**速率**(speed)，以及經濟學上的邊際分析等皆屬於此範疇。

為了迅速有效的求得某一個量之瞬時變化率，微積分中的導數概念變成了一個最基本且重要的工具，它主要是用來探討函數的變化率，而其意義則依應用領域有不同的詮釋，因此，無論在自然科學或社會科學的發展過程中，它都扮演一個相當重要的角色。

在本章裡，我們將定義導數，介紹基本的求導數法則，以及如何將導數的概念應用到經濟學上的邊際分析。

版權所有

學習目標

- 如何求圖形的斜率與利用極限定義求導數
- 基本的導數運算規則
- 如何求變化率：討論邊際成本、邊際收益及邊際利潤
- 如何使用乘法規則、除法規則及乘冪規則
- 高階導數的求法與意義
- 瞭解什麼是不可微的函數

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

2-1 變化率與切線

如何來衡量函數圖形上某一點或是比較不同兩點間的陡峭程度？例如：在圖 2-1 中，P 和 Q 為圖形上相異的兩個點，P_1、P_2、$P_3\cdots$ 分別為靠近 P 之相異點，通過 P 與 P_i 之直線為 l_{P_i}，當 P_i 沿著曲線往 P 靠近時，l_{P_i} 趨近於直線 l_P，同理，l_{Q_i} 趨近於 l_Q。此時，我們很容易可以分辨出 l_Q 較 l_P 陡峭，或者說 l_P 較 l_Q 平坦。另一方面，很顯然地，l_Q 的斜率大於 l_P 的斜率，因此，我們可以用斜率的概念來衡量圖形上某一點的陡峭程度，而 l_P 與 l_Q 即為我們將定義的**切線**(tangent line)。

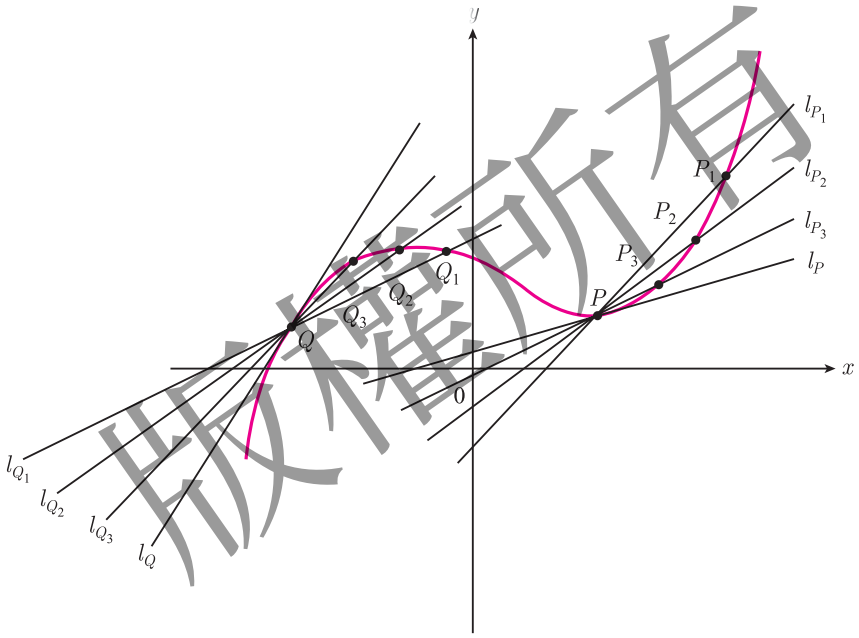


圖 2-1

如何定義函數圖形的切線？假設 $y = f(x)$ 為一函數，如圖 2-2，$P(a, b)$ 為圖形上的一點，$Q(x, y)$ 為圖形上的另一點，連結 P 和 Q 兩點所成的直線 l_{PQ} 稱為**割線**(secant line)，其斜率為

$$m_{pq} = \frac{y-b}{x-a}$$

顯然地，當 Q 沿著圖形靠近 P 時，l_{PQ} 必須靠近某一條固定的直線 l_P，如果這種情況發生，則此直線 l_P 即為函數圖形在 P 點的切線。

版權所有

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

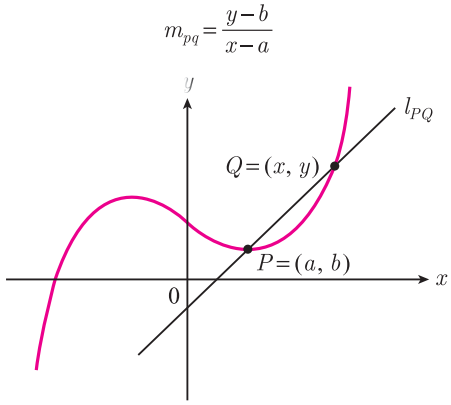


圖 2-2

定義 2-1 切線斜率與變化率

設 $P(a, f(a))$ 為函數 $y=f(x)$ 圖形上的一點。如果

$$m=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

存在，則 m 稱為此函數（或函數圖形）在 P 點（或在 $x=a$）切線的**斜率**(slope)或者是函數 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 的**瞬時變化率**(instantaneous rate of change)或簡稱**變化率**(rate of change)。若 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 之切線斜率為 m，則其**切線方程式**(equation of tangent line)為

$$y-f(a)=m(x-a)$$

版權所有

例題 1 求常數函數之變化率

求常數函數 $f(x)=k$ 在 $x=a$ 之變化率。

解 變化率 $=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}\frac{k-k}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}0$

$=0$

所以，$f(x)$ 在 $x=a$ 之變化率為 0。

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

例題 2 求常數函數之切線方程式

在例題 1 中，求通過 (a, k) 之切線方程式。

解 由例題 1 知函數 $f(x)=k$ 在 $x=a$ 之斜率為 0，故所求之切線方程式為

$$y-k=0(x-a)$$

即 $y=k$。

例題 3 求函數圖形之斜率

求函數 $f(x)=x^2+1$ 在 $x=0$ 之切線斜率。

解 斜率 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+1)-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}x$

$=0$

所以，此函數在 $x=0$ 之切線斜率為 0。

例題 4 求切線方程式

在例題 3 中，求通過 $(0, 1)$ 之切線方程式。

解 由例題 3 知其斜率為 0，故所求之切線方程式為

$$y-1=0(x-0)$$

即 $y=1$。

例題 5 求函數之變化率

求函數 $f(x)=x^2-2x+3$ 在 $x=2$ 時之變化率。

版權所有

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

解 變化率 $= \lim_{x\to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$= \lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x+3-3}{x-2}$

$= \lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{x-2}$

$= \lim_{x\to 2} \dfrac{x(x-2)}{x-2}$

$= \lim_{x\to 2} x$

$= 2$

因此，函數在 $x=2$ 時之變化率為 2。

例題 6 求函數圖形之切線方程式

求函數 $f(x)=x^3$ 在 $x=1$ 之切線方程式。

解 斜率 $= \lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-1^3}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1} (x^2+x+1)$

$= 3$

因此，函數在 $x=1$ 之斜率為 3，切線方程式為

$$y-f(1)=3(x-1)$$

即 $y-1=3(x-1)$。

版權所有

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

例題 7 圖形上某些點沒有切線

令

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{當} x\geq 0 \\ x & \text{當} x<0 \end{cases}$$

證明此函數在 $x=0$ 時沒有切線。

解 此函數圖形如圖 2-3 所示，很顯然地，其在 $x=0$ 時沒有切線。

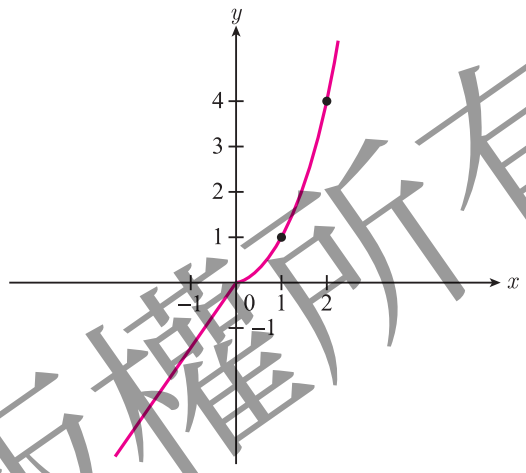


圖 2-3

事實上，

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}x=0$$

且

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x}$$
$$=1$$

所以，$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ 不存在，故此函數在 $x=0$ 時沒有切線。

版權所有

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

隨堂演練 2-1

1. 求函數 $f(x)=x^2$ 在 $x=1$ 之切線斜率。
2. 試問 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 是否有切線？
3. 求函數 $f(x)=x^3$ 在 $x=0$ 之切線方程式。
4. 令函數

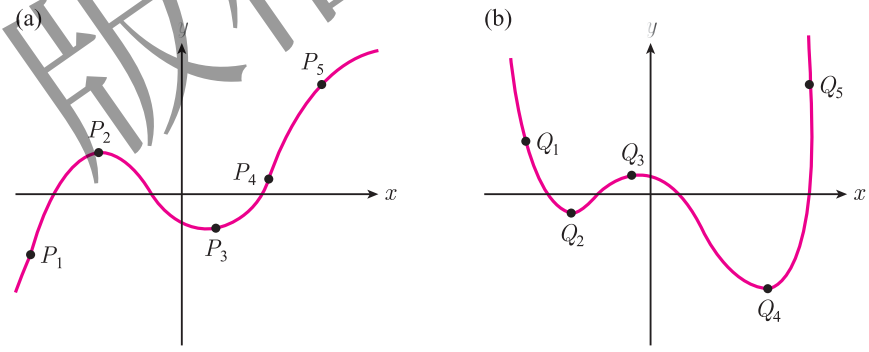
$$f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{當} x\geq 0 \\ x^2 & \text{當} x<0 \end{cases}$$

試問 $f(x)$ 在 $x=0$ 是否有切線？

5. 建構一函數 $f(x)$，其圖形上恰有兩個點沒有切線。

習題 2-1

1. 下列圖中所標示的點，何者斜率為正？何者為 0？何者為負？



2. 求下列各函數圖形在指定點的斜率：

(a) $f(x)=2x,\ x=0$

(b) $f(x)=5x^2,\ x=1$

(c) $f(x)=-4x,\ x=-2$

(d) $f(x)=x-1,\ x=1$

3. 在習題第 2 題中，求出其所對應的切線方程式。

版權所有

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

4. 求下列各函數圖形在指定點的斜率：

(a) $f(x) = -3x - 5,\ x = 5$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x},\ x = \dfrac{1}{2}$

(c) $f(x) = x^3,\ x = 0$

(d) $f(x) = -x^2 + x - 2,\ x = -1$

5. 在習題第 4 題中，求出其所對應的切線方程式。

6. 求函數 $f(x) = mx + b$，其中 m 與 b 為常數，在任一點之斜率與切線方程式。

7. 在習題第 6 題中，說明其幾何意義。

8. 求 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $x = 1$ 之斜率與切線方程式。

9. 令 $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{當} x \geq 0 \\ x^3 & \text{當} x < 0 \end{cases}$

試問此函數在 $x = 0$ 時是否有切線？如果有的話，求出其切線方程式。

10. 令 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{當} x > 1 \\ 2x - 5 & \text{當} x \leq 1 \end{cases}$

(a) 試問此函數在 $x = 1$ 時是否有切線？

(b) 求此函數在 $x = 3$ 和 $x = -3$ 之切線方程式。

11. 某部車子沿著高速公路開，在時間 t 時所行走之距離為 $s(t) = 90t$，試求這部車子在時間 $t = 5$ 時，它的距離變化率為何？並作適當的解釋。

12. 證明 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 在任一點之切線斜率為 $2ax + b$。

13. 證明 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 在任一點 $x > 0$ 之切線斜率為 $-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$。

14. 某天中午 12 時至 12 時 10 分測得的溫度為 $f(t) = 0.01t^2 + 0.1t + 24$ 度，$0 \leq t \leq 10$，求在 12 時 5 分的溫度變化率。

15. 請你建構出一個函數圖形 $y = f(x)$，使其在 $x = 0$ 及 $x = 4$ 時之切線斜率為 0。

16. 設 f 與 g 為兩函數且滿足 $g(x) = f(x + 1)$。若 $f(x)$ 在 $x = 1$ 的切線斜率為 m，證明 $g(x)$ 在 $x = 0$ 的切線斜率亦為 m。

17. 在習題第 16 題中，若 $f(x)$ 在 $x = 1$ 不存在切線，證明 $g(x)$ 在 $x = 0$ 亦不存在切線。

版權所有

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING