# 4

# 指數函數與對數函數

在前面的章節裡，我們所討論的函數不外乎多項式、有理函數及根式函數。然而，在理論與實務上，這些函數有它們的極限，也就是它們無法描述自然科學與應用科學中某些重要的現象，例如：將 0.01 公分報紙對摺 20 次，它的高度變成 $0.01 \times 2^{20} = 10{,}485.76$ 公分；在漲跌幅 7%的台北股票市場，某一支股價 100 元的股票連續飆漲停 10 個交易日，在第 10 個交易日，它的股價變成 $100 \times (1.07)^{10} \approx 196$ 元，漲幅大約 2 倍；其他如銀行的複利、放射性化學物質的衰退，以及細菌的繁殖等都具備相同的性質。然而，這些現象無法用我們前幾章所學的函數來描述，而必須尋求特殊的函數來處理，即所謂的**指數函數** (exponential function)，而其反函數即為**對數函數** (logarithmic function)。

在本章裡，我們將定義指數函數與對數函數，進而探討這些函數的基本性質、運算法則、導數以及在經濟學和其他領域上的應用。

版權所有

## 學習目標

- 指數函數與對數函數的意義及其圖形
- 如何求指數函數與對數函數的導數
- 指數函數與對數函數在經濟學上的應用
- 瞭解成長與衰退的指數模型

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

## 4-1 指數函數

在高中時，我們曾經學習到一個數的次方，簡單地講這就是所謂的指數函數，例如：$f(x)=2^x$、$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$、$f(x)=10^x$、$f(x)=(0.005)^x$ 皆為指數函數。一般而言，我們有以下的定義：

### 定義 4-1 指數函數

設 $a>0$ 且 $a\neq 1$，則 $f(x)=a^x$ 稱為以 $a$ 為**底**(base)的指數函數，其中 $x$ 稱為**指數**(exponent)。

### 例題 1 求指數函數的值

設 $f(x)=2^x$，求 $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$。

解 $f(-2)=2^{-2}=\frac{1}{4}$　　$f(-1)=2^{-1}=\frac{1}{2}$

$f(0)=2^0=1$　　$f(1)=2^1=2$

$f(2)=2^2=4$

### 例題 2 求指數函數的值

設 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，求 $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$。

解 $f(-2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$　　$f(-1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$

$f(0)=\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$　　$f(1)=\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}$

$f(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

### 例題 3 描繪指數函數圖形

描繪 $f(x)=2^x$ 之圖形。

版權所有

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

解 在這裡，我們用描點的方法將圖形描繪於圖 4-1。

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ | $4$ | $8$ |

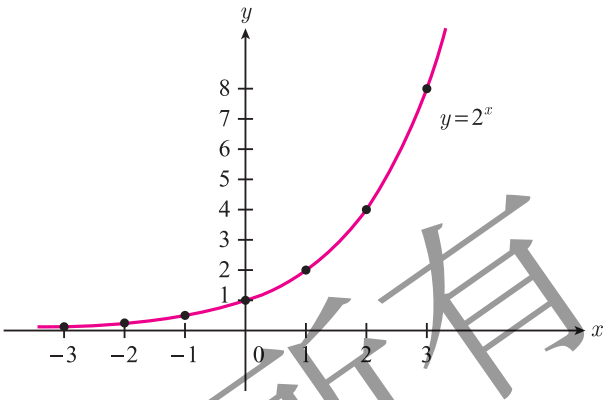


圖 4-1

## 例題 4 描繪指數函數圖形

描繪 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 之圖形。

解 如同例題 3，我們用描點的方法將圖形描繪於圖 4-2。

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $8$ | $4$ | $2$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |

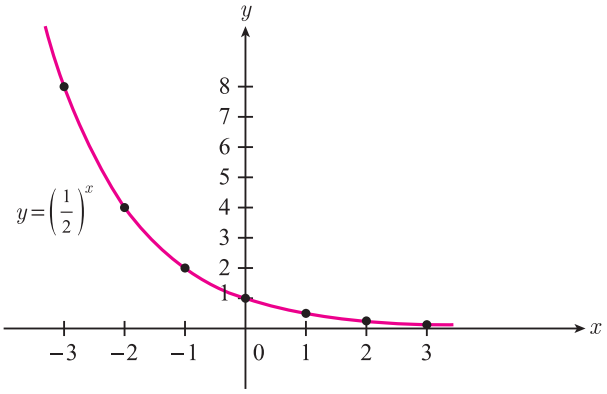


圖 4-2

版權所有

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

綜合例題 3 和例題 4 的指數函數圖形，我們可將一般指數函數的性質以及圖形敘述在定理 4-1 中。

## 定理 4-1 指數函數之性質及圖形

設 $f(x)=a^x$ 為指數函數，則

(a) $f(x)$ 之定義域為 $(-\infty, \infty)$。

(b) $f(x)$ 之值域為 $(0, \infty)$。

(c) $f(x)$ 之 $y$ 截距為 $f(0)=a^0=1$，但無 $x$ 截距。

(d) $f(x)$ 為連續函數。

(e) 若 $a>1$，則 $f(x)$ 為遞增函數，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ 且其圖形如圖 4-3 所示。

(f) 若 $0<a<1$，則 $f(x)$ 為遞減函數，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ 且其圖形如圖 4-4 所示。

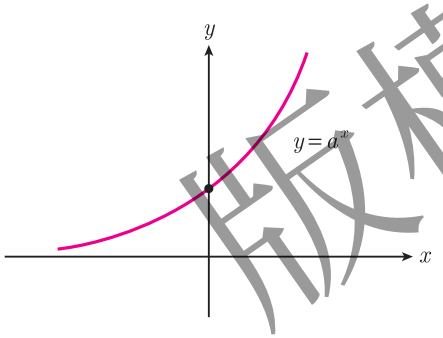

圖 4-3

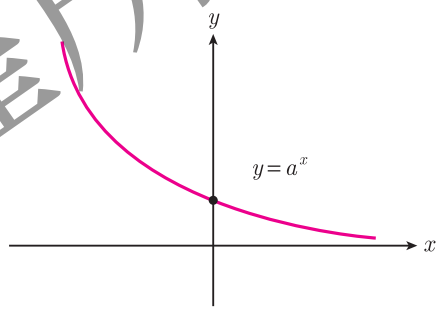

圖 4-4

指數函數的例子經常發生在我們周遭，最典型的例子即所謂的**複利** (compounded interest) 問題。假設我們將**本金** (principal) $P_0$ 元存到某家銀行，銀行的存款**利率** (interest) 為 $r$（例如：$r$ 為 8%）且每年複利一次，試問 $n$ 年後本利和為多少？設 $P(n)$ 表示 $n$ 年後的本利和，則顯然地，一年後的本利和為

$$P(1)=P_0+rP_0=P_0(1+r)$$

二年後之本利和為

$$P(2)=P(1)+rP(1)=P(1)(1+r)=P_0(1+r)^2$$

依此類推，我們得到 $n$ 年後之本利和為

$$P(n)=P_0(1+r)^n$$

版權所有
華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

**例題 5 求本利和**

將 1,000 元存放於銀行，年利率為 6%且每年複利一次，試問 5 年後之本利和為多少？

解 $P(5)=1{,}000(1+0.06)^5\approx 1{,}338$ 元，即 5 年後之本利和為 1,338 元。

一般而言，銀行的利率通常以年利率為準，但是有些銀行可能設計不同的計息方式滿足不同顧客的需求，而有每半年複利一次，即每年複利二次；每季複利一次，即每年複利四次；每月複利一次，即每年複利十二次。一般而言，我們假設將本金 $P_0$ 存放於銀行，年利率為 $r$ 且每年複利 $k$ 次，即每 $\frac{365}{k}$ 天複利一次。在這種情況下，每次複利之利率為 $\frac{r}{k}$，而一年後之本利和為 $P(1)=P_0\left(1+\frac{r}{k}\right)^k$，$n$ 年後之本利和為 $P(n)=P_0\left(1+\frac{r}{k}\right)^{nk}$。

**例題 6 求本利和**

將 1,000 元存放於銀行且銀行之年利率為 8%。

(a) 每年複利一次，試問 2 年後之本利和為多少？

(b) 每半年複利一次，試問 2 年後之本利和為多少？

(c) 每季複利一次，試問 2 年後之本利和為多少？

(d) 每個月複利一次，試問 2 年後之本利和為多少？

解 (a) $P(2)=1{,}000(1+0.08)^2\approx 1{,}166$ 元。

(b) $P(2)=1{,}000\left(1+\frac{0.08}{2}\right)^4=1{,}000(1+0.04)^4\approx 1{,}170$ 元。

(c) $P(2)=1{,}000\left(1+\frac{0.08}{4}\right)^8=1{,}000(1+0.02)^8\approx 1{,}172$ 元。

(d) $P(2)=1{,}000\left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{24}=1{,}000(1+0.0067)^{24}\approx 1{,}173$ 元。

在上述的論述中，我們得到 $P(n)=P_0\left(1+\frac{r}{k}\right)^{nk}$。其中 $P(n)$ 為 $n$ 年後的本利和，屬於未來的價值。現在我們逆向思考，假設 $n$ 年後，我們可拿回本利和 $P(n)$，

版權所有

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

那麼 $P_0$ 即所謂的**現值** (present value)。因此，現值 $P_0 = P(n)\left(1+\frac{r}{k}\right)^{-nk}$，其中 $\left(1+\frac{r}{k}\right)^{-1}$ 稱為**折現因子** (discount factor)。

## 例題 7 求現值

某家銀行年利率為 6%且每半年複利一次，求 4 年後 10,000 元之現值。

**解** 4 年後 10,000 元之現值為

$$P_0 = 10{,}000\left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{-8} \approx 7{,}894\text{元}$$

即現在必須存入 7,894 元，4 年後即可領回 10,000 元。

## 例題 8 求折價

一部價值 36,000 元之個人電腦，每年的折價率為 20%，試問這部電腦 3 年後價值多少？

**解** 如同在複利的情況，我們可將折價率視為 $-0.2$，因此，3 年後電腦之折價為 $36{,}000(1-0.2)^3 = 36{,}000(0.8)^3 = 18{,}432$ 元。

現在，我們再回到複利的問題上。我們仍然假設本金 $P_0$ 存放在年利率 $r$ 的銀行裡且每年複利 $k$ 次，則 $n$ 年後之本利和為 $P(n) = P_0\left(1+\frac{r}{k}\right)^{nk}$。若銀行每年複利的次數頻率趨近於無窮大，則 $n$ 年後之本利和應該為

$$\begin{aligned} P(n) &= \lim_{k\to\infty} P_0\left(1+\frac{r}{k}\right)^{nk} \\ &= \lim_{k\to\infty} P_0\left(1+\frac{1}{\frac{k}{r}}\right)^{\frac{k}{r}nr} \\ &= P_0\left[\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{k}{r}}\right)^{\frac{k}{r}}\right]^{nr} \end{aligned}$$

版權所有

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

令 $x=\frac{k}{r}$，則

$$P(n)=P_0\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{nr}$$

緊接著，我們要問 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 是否存在？若存在，其值為何？利用簡單的計算機，我們可以得到下表：

| $x$ | $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 2.44141 |
| 10 | 2.59372 |
| 20 | 2.653297 |
| 100 | 2.704813 |
| 200 | 2.711517 |
| 1000 | 2.716925 |
| 2000 | 2.717603 |
| 10000 | 2.718146 |

經由此表可以看出，$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 應該存在且其極限大約為 2.718⋯。事實上，的確如此，而且此極限值通常用 $e$ 來表示，在數學上是非常重要的一個無理數。

版權所有

**定義 4-2 自然指數**

$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\approx 2.71828$ 稱為自然指數 (natural exponent)。

利用 $e$ 之定義，我們得到 $n$ 年後之本利和為

$$P(n)=P_0e^{rn}$$

**定義 4-3 連續複利**

將本金 $P_0$ 元存於年利率 $r$ 的銀行裡，在連續複利之下，$t$ 年後之本利和為 $P(t)=P_0e^{rt}$。

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

同理，我們可以定義連續複利下的現值。

**定義 4-4 連續複利之現值**

銀行之年利率為 $r$，連續複利，$t$ 年後 $P$ 元其現值為 $P_0 = Pe^{-rt}$。

**例題 9 求連續複利之本利和**

將 1,000 元存放於年利率 8%之銀行裡，連續複利，2 年後之本利和為多少？

解 $P(2) = 1{,}000e^{0.08(2)} = 1{,}000e^{0.16} \approx 1{,}174$

由例題 6 與例題 9 中可知，將本金 $P$ 存放在利率為 $r$ 的銀行裡，每年複利 $k$ 次與連續複利，$t$ 年後其本利和十分的接近。

**例題 10 求連續複利之現值**

銀行之年利率為 6%，在連續複利之下，10 年後之 5,000 元其現值為多少？

解 現值 $P_0 = 5{,}000e^{-(0.06)(10)} = 5{,}000e^{-0.6} \approx 2{,}744$。

最後，我們再回來探討由 $e$ 所定義的特殊指數函數。

**定義 4-5 自然指數函數**

$y = e^x$ 稱為自然指數函數 (natural exponential function)。

因 $e > 1$，故 $y = e^x$ 滿足定理 4-1 中 (a) 至 (d) 之性質。利用計算機，我們可將 $y = e^x$ 的一些特定點求出：

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e^x$ | 0.05 | 0.14 | 0.37 | 1 | 2.7 | 7.4 |

因此，$y = e^x$ 之圖形可描繪如圖 4-5。

版權所有

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

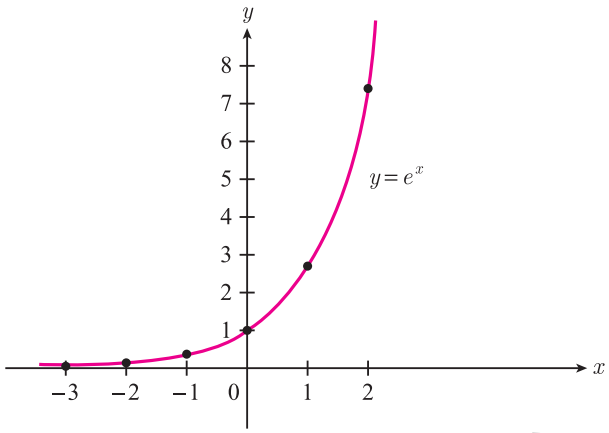


圖 4-5

一般而言，若 $k>0$，則 $y=e^{kx}$ 之圖形如圖 4-6 所示，$y=e^{-kx}$ 之圖形如圖 4-7 所示。

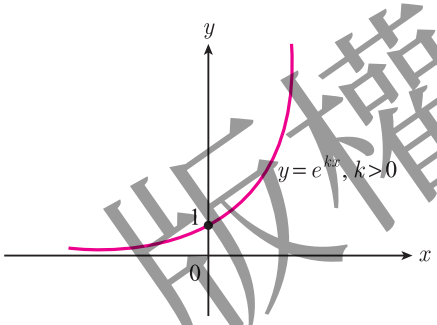


圖 4-6

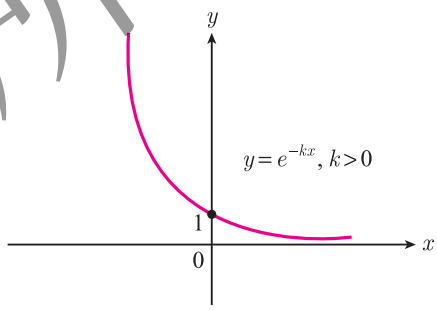


圖 4-7

## 隨堂演練 4-1

1. 描繪 $y=3^x$ 與 $y=3^{-x}$ 之圖形。
2. 將 1,000 元存放在年利率 8%之銀行裡，求下列各種情況下，10 年後之本利和。
   (a) 每年複利一次。
   (b) 每季複利一次。
   (c) 每月複利一次。
   (d) 連續複利。
3. 在漲跌幅 7%的台北股票市場，某一支股票，每股以 50 元上市交易，連續漲停 10 個交易日，求第 10 個交易日之收盤價。

版權所有

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

4. 求極限 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}$ 與 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$。

5. 描繪函數 $y=2+e^{x}$ 與 $y=2+e^{-x}$ 之圖形。

## 習題 4-1

習題第 1～8 題，描繪函數圖形。

**1.** $y=5^{x}$

**2.** $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x}$

**3.** $y=2e^{3x}$

**4.** $y=\frac{1}{5}e^{-2x}$

**5.** $y=e^{x}+2$

**6.** $y=5+2^{x}$

**7.** $y=5-2^{x}$

**8.** $y=(0.1)^{x}$

**9.** 將 5,000 元存放於年利率為 5%之銀行，求下列各種情況下，10 年後之本利和。

(a) 每年複利一次。　(b) 每半年複利一次。

(c) 每季複利一次。　(d) 每月複利一次。

(e) 每日複利一次。　(f) 連續複利。

**10.** 有一部車子價值 80 萬元，每年之折舊率為 20%，求 5 年後這部車子價值為多少。

**11.** 某人現年 30 歲，想存入一筆錢到某家銀行裡，這家銀行之年利率為 6%，他希望到 65 歲退休時，能夠領回 100 萬元，試問在下列各種情況下，他現在應存入多少錢？

(a) 每年複利一次。　(b) 每半年複利一次。　(c) 連續複利。

**12.** 某家公司生產 $x$ 單位產品時，其成本函數為 $C(x)=100-e^{-x}$（萬元），求其固定成本並描繪其圖形。

**13.** 在漲跌幅 7%的台北股票市場，有一支股價 100 元的股票，連續跌停 10 個交易日，求第 10 個交易日之收盤價。

**14.** 求下列極限：

(a) $\lim_{x\to\infty}2^{-x}$　(b) $\lim_{x\to-\infty}3x$　(c) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}+5}{3e^{-x}+7}$　(d) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

版權所有

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

**15.** 求下列極限值：

(a) $\lim\limits_{h\to 0^+}(1+h)^{\frac{1}{h}}$　(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$　(c) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{-t}$　(d) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$

**16.** 描繪下列函數圖形：

(a) $y=2(1-e^{-3x})$　(b) $y=\dfrac{1}{1+2e^{-x}}$

版權所有

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING