5-3 面積與定積分

我們曾學過許多圖形的面積公式，如圓形、三角形與矩形（如圖 5-1）。本節我們將研究其他不規則區域（如圖 5-2）面積的定義及其計算方法。

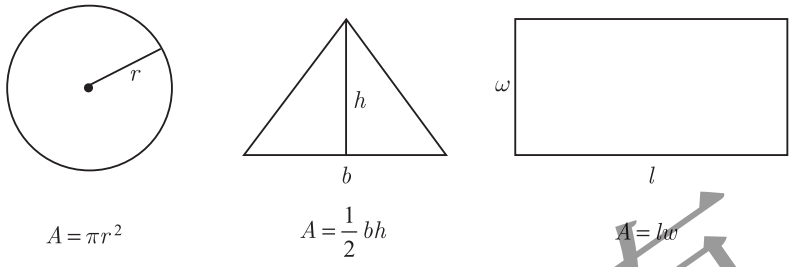


圖 5-1　不同圖形的面積

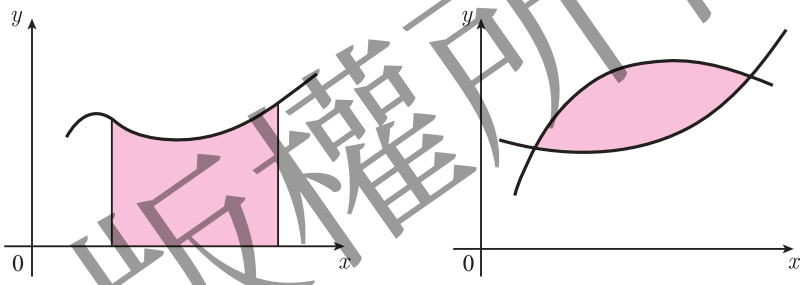


圖 5-2　曲線所圍成的區域

首先，我們考慮由曲線 $y = f(x)$，x 軸與垂線 $x = a$ 與 $x = b$ 所圍成的區域。$y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 區間連續且 $f(x) \geq 0$，如圖 5-3：

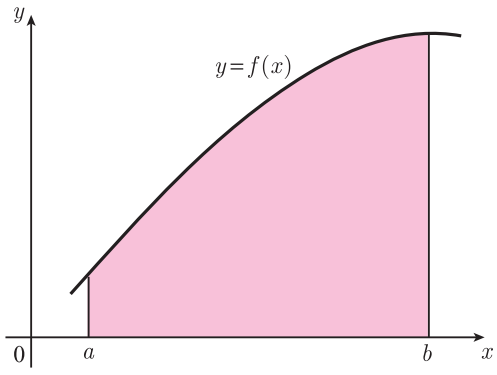


圖 5-3　曲線下所圍的區域

版權所有

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

為了計算曲線下所圍區域的面積，我們先採用矩形來求近似的面積。圖 5-4(a) 的圖形用 5 個矩形來近似這個曲線下的區域，每個矩形左邊邊線的高正好等於曲線的高度。顯然地，利用 5 個矩形來近似曲線下的面積並不是很精確，低估的部分是曲線下面矩形上面的白色區域。至於圖 5-4(b)，我們使用 25 個矩形來近似這個區域，白色的誤差區域變得非常小。

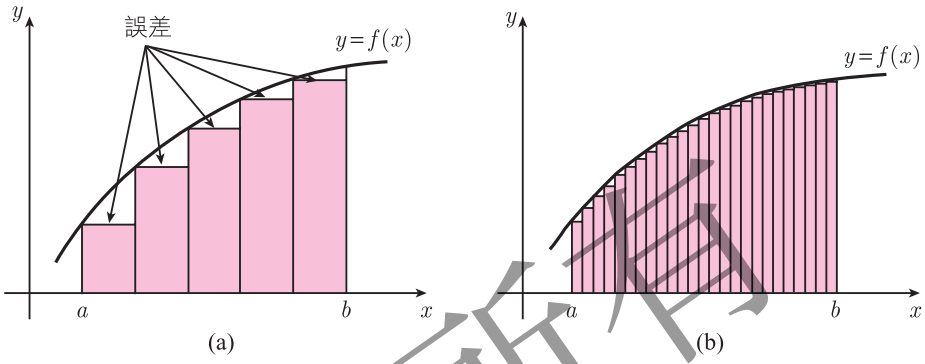


圖 5-4　使用矩形近似曲線下的面積

欲使用矩形來近似曲線下的面積，首先將 a 到 b 的區間分成 n 等分，每一等分的寬度 Δx 為

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

如圖 5-5，取 $n = 5$，分成 5 等分，將 5 個矩形的面積加起來，即得曲線下區域的近似面積。矩形面積為長乘寬，此處的寬全是 Δx，長則是由 x 軸至曲線的高度，其值為

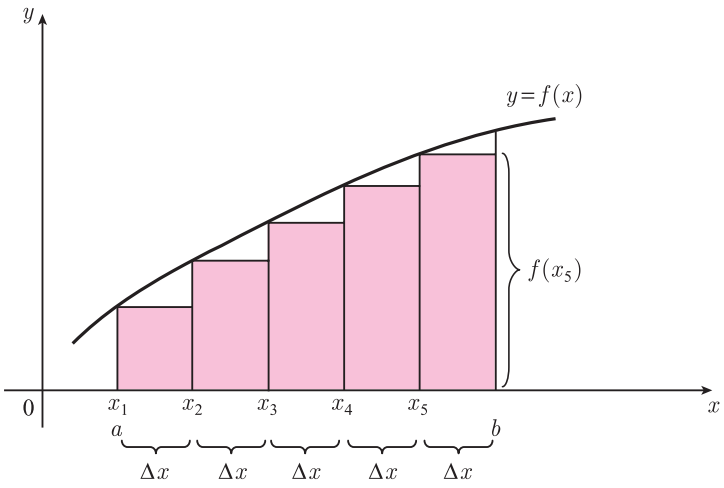


圖 5-5　紅色部分面積為 $f(x_i)\Delta x$ 之和

版權所有
華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

$f(x)$，其中 x 是其對應的座標值。如果將其座標值分別定為 x_1、x_2、x_3、x_4 與 x_5，則其高度為 $f(x_1)$、$f(x_2)$、$f(x_3)$、$f(x_4)$ 與 $f(x_5)$。曲線下的面積可寫成：

$$\begin{aligned}\text{面積} &= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + f(x_4)\Delta x + f(x_5)\Delta x \\ &= \sum_{i=1}^{5} f(x_i)\Delta x\end{aligned}$$

例題 20 使用矩形近似面積

求由曲線 $f(x) = 2 + x^2$、x 軸、直線 $x = 0$ 與 $x = 2$ 所圍區域面積的近似值。

(a) 使用 $n = 4$ 等分。

(b) 使用 $n = 8$ 等分。

解 (a) 若 $n = 4$，則每一等分的寬度為

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = 0.5$$

如圖 5-6 所示，則所求的矩形近似面積為

$$\begin{aligned}A &= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + f(x_4)\Delta x \\ &= f(0)0.5 + f(0.5)0.5 + f(1)0.5 + f(1.5)0.5 \\ &= (2 + 2.25 + 3 + 4.25)0.5 \\ &= 5.75\end{aligned}$$

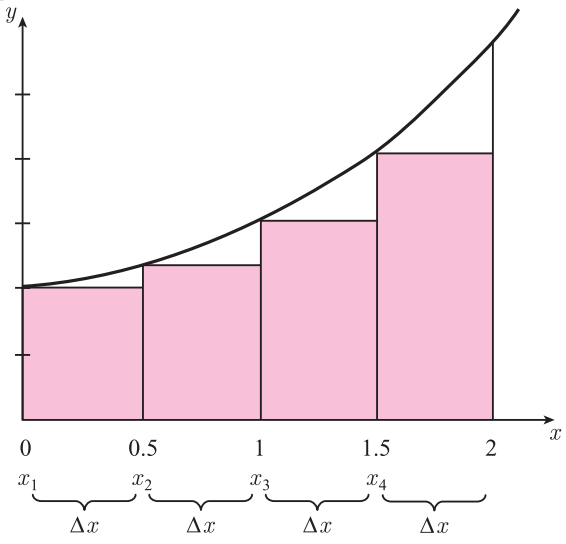


圖 5-6 例題 20 的矩形近似圖

版權所有

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

(b) 若 $n=8$，則每一等分的寬度為

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{2-0}{8}=0.25$$

則所求的近似面積為

$$\begin{aligned}A&=\sum_{i=1}^{8}f(x_i)\Delta x\\&=[f(0)+f(0.25)+f(0.5)+f(0.75)+f(1)+f(1.25)+f(1.5)+f(1.75)]0.25\\&=(2+2.0625+2.25+2.5625+3+3.5625+4.25+5.0625)0.25\\&=(24.75)(0.25)\\&=6.1875\end{aligned}$$

曲線下面積的近似值會因為矩形數量增加而增加其準確度。在下一節的例題 23 中，我們將計算其真正的面積為 $\frac{20}{3}$ 平方單位。

例題 21 使用矩形近似面積

求由曲線 $f(x)=\frac{1}{x}$、x 軸、直線 $x=1$ 與 $x=4$ 所圍區域之面積，取 $n=6$ 等分。

解 當 $n=6$ 時，則每一等分的寬度為

$$\Delta x=\frac{b-a}{6}=\frac{4-1}{6}=0.5$$

如圖 5-7 所示，則所求的近似面積為

$$\begin{aligned}A&=\sum_{i=1}^{6}f(x_i)\Delta x\\&=[f(1)+f(1.5)+f(2)+f(2.5)+f(3)+f(3.5)]\cdot 0.5\\&=\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{1}{3}+\frac{2}{7}\right)0.5\\&=(3.436)(0.5)=1.718\end{aligned}$$

版權所有

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

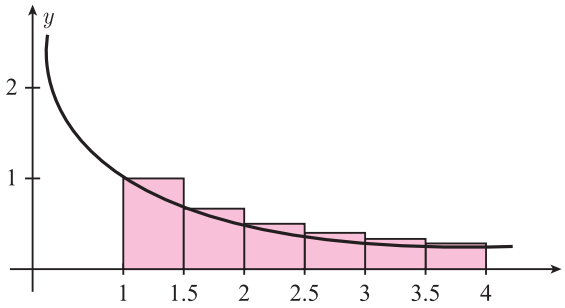


圖 5-7　例題 21 的矩形近似圖

再度回到計算曲線 $y = f(x)$ 下的面積，如果我們切割成 n 個矩形來計算此區域的面積，則其近似面積為

$$A_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

而曲線 $y = f(x)$ 與 x 軸所圍的區域，在 $[a, b]$ 區間的真正面積 A 應是 n 趨近無窮大時，A_n 的極限，即

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

這裡 $n \to \infty$ 與 $\Delta x \to 0$ 是同義的，因為矩形的寬度變得愈來愈小時，表示分割的矩形數量愈來愈多。因此，也可以寫成

$$A = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

這個極限稱為函數 f 由 a 到 b 的**定積分** (definite integral)。

定義 5-2　定積分

設函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 連續。f 從 a 至 b 的定積分定義為

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

其中 $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ 且 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的值由 $x_1 = a$ 開始逐項累加 Δx。若 f 在 $[a, b]$ 為非負的函數，則此定積分即表示曲線下至 x 軸，由 $x = a$ 至 $x = b$ 所圍區域的面積。

在上述定義中，我們將定積分定義成「和的極限」，這個和的更一般形式稱為黎曼和 (Riemann Sum)，是以德國數學家 Bernhard Riemann (1826-1866) 來命名的。

版權所有
華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

隨堂演練 5-3

1. 求由曲線 $f(x)=\sqrt{x}$、x 軸、直線 $x=0$ 與 $x=4$ 所圍區域面積的近似值。
   (a) 使用 $n=4$ 等分。
   (b) 使用 $n=8$ 等分。
2. 求曲線 $f(x)=1-x^2$，其範圍為 $[-1,\ 1]$，與 x 軸所圍區域面積的近似值。
   (a) 使用 $n=4$ 等分。
   (b) 使用 $n=8$ 等分。

習題 5-3

習題第 1～9 題，依據給定的矩形數量，計算黎曼和來估計曲線下的面積，計算至小數點後第二位。

1. $f(x)=x^2,\ a=2,\ b=4,\ n=4$

2. $f(x)=\sqrt{x},\ a=1,\ b=4,\ n=6$

3. $f(x)=5-x^2,\ a=0,\ b=2,\ n=4$

4. $f(x)=\dfrac{1}{x},\ a=1,\ b=3,\ n=5$

5. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}},\ a=1,\ b=2,\ n=4$

6. $f(x)=2+\sqrt{x},\ a=0,\ b=1,\ n=3$

7. $f(x)=e^x,\ a=0,\ b=1,\ n=4$

8. $f(x)=x(1-x)^2,\ a=0,\ b=1,\ n=4$

9. $f(x)=\dfrac{1}{x+1},\ a=0,\ b=2,\ n=4$

10. 當我們使用黎曼和來估計曲線下的面積時，使用愈多的矩形，則估計值誤差愈小，為什麼？

版權所有

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

5-4 微積分基本定理

上一節我們定義什麼是定積分，讀者可以發現定積分所使用的數學記號與反導數所使用的數學記號極為相似。事實上，計算曲線下的面積與反導數有極大的關係。我們以下述的兩個應用說明其相關性。

1. 物理上的應用：

(a) 行車距離可以由行車速度的反導數求出。由 $v = \frac{ds}{dt}$ 可以推得

$$s = \int v dt$$

(b) 行車距離也可以由速度函數 $v(t)$ 曲線下的面積求得。考慮汽車以每小時 60 公里的速度行駛 3 小時。如圖 5-8 所示，其面積為 180。如果不是等速運動，這時的行車距離應為 $s = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i v(t_i)\Delta t$（如圖 5-9 所示）：

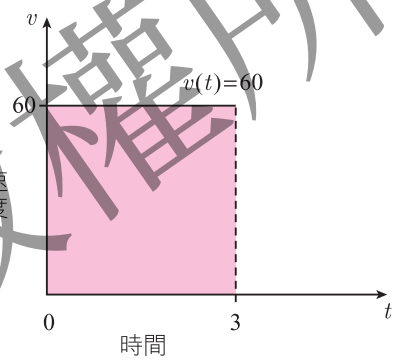


圖 5-8　距離為速度曲線下的面積

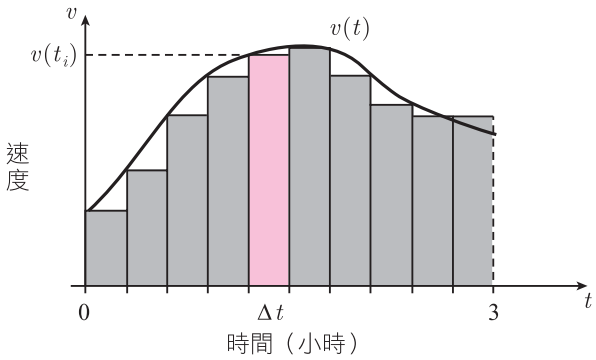


圖 5-9　非等速時，距離為速度曲線下的面積

版權所有

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

2. 商業上的運用：

(a) 總成本可以由邊際成本的反導數求出，即

$$C(x) = \int MC(x)dx$$

(b) 總成本 $C(x)$ 可由邊際成本函數 $MC(x)$ 曲線下的面積求得，如圖 5-10 所示：

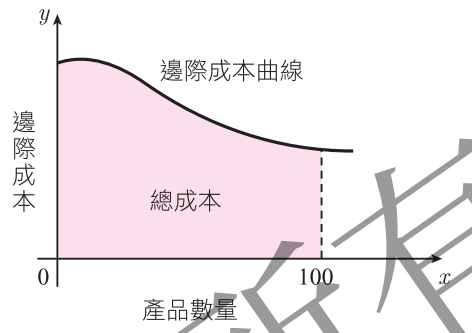


圖 5-10　紅色部分表示生產 100 單位時的總成本

假設函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 為非負且連續，$A(x)$ 表示曲線 $f(x)$ 下由 a 至 x 的面積（如圖 5-11），則

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

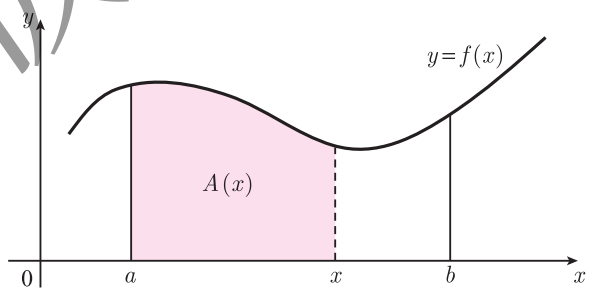


圖 5-11　曲線 $f(x)$ 下由 a 至 x 的面積

我們接著要證明 $A(x)$ 為 $f(x)$ 的反導數，圖 5-12 紅色部分的面積為 $A(x+\Delta x) - A(x)$。紅色面積可以由寬 Δx 與長 $f(x)$ 的矩形來估計。因此

$$A(x+\Delta x) - A(x) \approx f(x)\Delta x$$

或

$$\frac{A(x+\Delta x) - A(x)}{\Delta x} \approx f(x)$$

版權所有
華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

當 Δx 取得愈小，則有愈好的估計值。取無窮小時，可得

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x+\Delta x) - A(x)}{\Delta x} = f(x)$$

或

$$A'(x) = f(x)$$

因此， $A(x)$ 為 $f(x)$ 的反導函數。

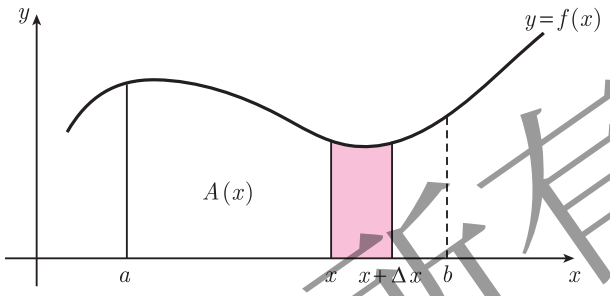


圖 5-12　紅色面積為 $A(x+\Delta x) - A(x)$

已知 $A(x)$ 為 $f(x)$ 的一個反導數，若 $F(x)$ 為 $f(x)$ 的另一反導數，則

$$A(x) = F(x) + C$$

其中 C 為常數。再由

$$A(b) = \int_a^b f(x)dx,\ A(a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

可推得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= A(b)\\ &= A(b) - A(a)\\ &= (F(b)+C) - (F(a)+C)\\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

此結果，

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

為微積分最重要的定理之一，稱為**微積分基本定理**(fundamental theorem of calculus)，其連結微分與積分的關係。

版權所有

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

定理 5-4 定積分的運算

若函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 區間連續，則

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

其中 $F(x)$ 為 $f(x)$ 的任意反導數。

為了計算方便，我們使用記號 $F(x)\Big|_a^b$ 表示 $F(b)-F(a)$。a 與 b 稱為積分的界限，b 稱為**上界** (upper limit) 且 a 稱為**下界** (lower limit)。計算定積分的步驟如下：

1. 求出 $f(x)$ 的反導數（省略常數項 C）。
2. 計算反導數在上界的值，即 $F(b)$。
3. 計算反導數在下界的值，即 $F(a)$。
4. 求出 $F(b)-F(a)$。

例題 22 微積分基本定理的應用

求 $\int_1^2 x^2dx$。

解 $f(x)=x^2$ 在 $[1,2]$ 連續，且 $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ 為 $f(x)$ 之一反導數。

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^2dx &= \frac{1}{3}x^3\Big|_1^2\\ &= \frac{1}{3}\times 2^3 - \frac{1}{3}\times 1^3\\ &= \frac{8}{3}-\frac{1}{3}\\ &= \frac{7}{3}\end{aligned}$$

例題 23 求定積分

求 $\int_0^2 (2+x^2)dx$。

版權所有

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

解 $\int_0^2 (2+x^2)dx = \left(2x+\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2$

$= \left(2\times 2+\frac{1}{3}\times 2^3\right) - \left(2\times 0+\frac{1}{3}\times 0^3\right)$

$= 4+\frac{8}{3} = 6\frac{2}{3}$

例題 24 求定積分

求 $\int_1^4 \frac{1}{x}dx$。

解 $\int_1^4 \frac{1}{x}dx = \ln|x|\Big|_1^4 = \ln 4 - \ln 1 = \ln 4$

例題 25 求定積分

求 $\int_0^1 (1-e^t)dt$。

解 $\int_0^1 (1-e^t)dt = (t-e^t)\Big|_0^1 = (1-e^1) - (0-e^0) = 1-e^1-0+1 = 2-e$

例題 26 求曲線下的面積

求曲線 $y=\frac{1}{x}$ 下，由 $x=1$ 至 $x=8$ 的面積。

解 面積為

$$\int_1^8 \frac{1}{x}dx = \ln|x|\Big|_1^8 = \ln 8 - \ln 1 = \ln 8$$

例題 27 求曲線下的面積

求曲線 $y=e^{2x}$ 下，由 $x=0$ 至 $x=1$ 的面積。

版權所有

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

解 因為 e^{2x} 在 $[0,1]$ 區間為非負且連續，所求的面積為下述定積分：

$$\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}(e^2-1)$$

定積分具有與不定積分相同的運算規則（參見定理 5-2）。這些規則同樣可由黎曼和的極限導出。

定理 5-5 定積分運算規則

(a) $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$。

(b) $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$。

(c) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$，其中 k 為常數。

(d) $\int_a^b f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$，其中 $a < c < b$。

為配合定理 5-5(d)，通常，我們規定：

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

例題 28 求某段產量之間的總成本

某公司的邊際成本函數 $MC(x) = \dfrac{50}{\sqrt{x}}$，其中 x 表示產量的單位。求生產 100 至 400 單位的總成本。

解 生產 100 至 400 單位的總成本為

$$\int_{100}^{400} \frac{50}{\sqrt{x}}dx = 50\int_{100}^{400} x^{-\frac{1}{2}}dx = (50\cdot 2\cdot x^{\frac{1}{2}})\Big|_{100}^{400}$$

$$= 100\sqrt{400} - 100\sqrt{100} = 2{,}000 - 1{,}000 = 1{,}000$$

版權所有

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

上述範例是給定一個變化率的函數由 a 至 b 作積分，得到 a 至 b 間的總累積數量。圖 5-13 闡述這個概念，每條曲線均表示一個比率的變動情形，曲線下的面積可由定積分求得，即是該變化率下的總累積數量。

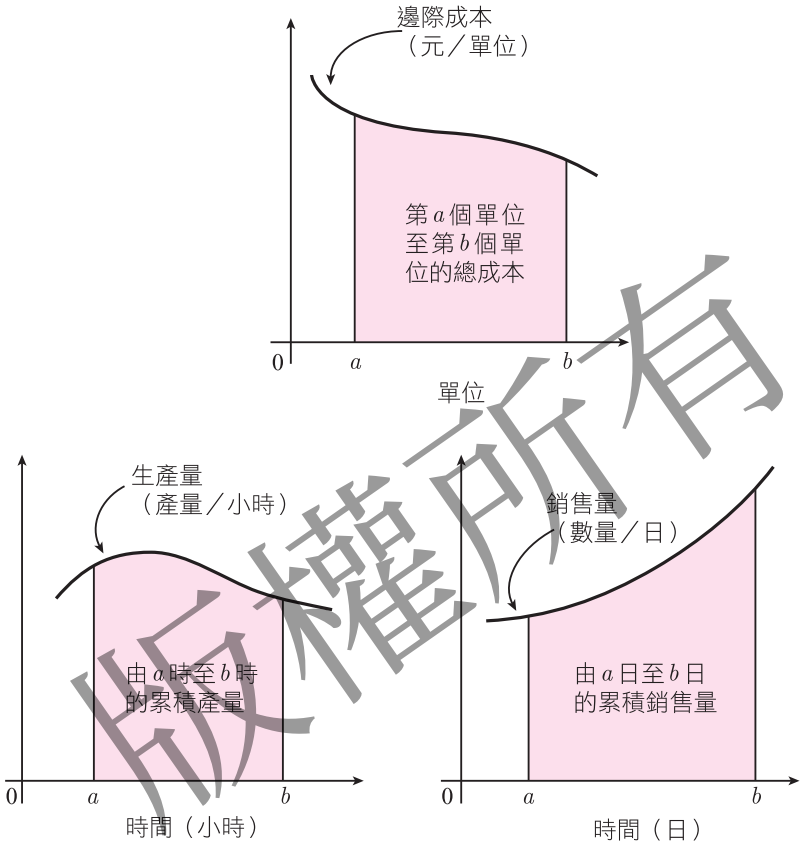


圖 5-13　函數 $f(x)$ 由 a 至 b 的累積

版權所有

例題 29　由生產速率求總產量

某測試工程師檢測電腦晶片的速率為 $-3t^2+20t+12$（晶片／小時），$t \le 6$，其中 t 為早上 9 時以後過了 t 個小時。請問由早上 10 時至下午 1 時共可測試多少晶片？

解 依題意從早上 10 時至下午 1 時所能檢測完的晶片總數為

$$\int_1^4 (-3t^2+20t+12)dt = \left(-t^3+20\frac{1}{2}t^2+12t\right)\Big|_1^4$$

$$= -64+160+48-(-1+10+12) = 123$$

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

隨堂演練 5-4

1. 求 $\int_0^2 x^2(3-x)dx$。

2. 求 $\int_0^4 \sqrt{x}dx$ 與 $\int_{-1}^1 (1-x^2)dx$。

3. 求曲線 $y=x^2+e^x$ 下，由 $x=0$ 至 $x=2$ 的面積。

4. 某產品的邊際利潤函數為 $MP(x)=-0.5x+20$ 萬元。

   (a) 求銷售量由 100 增加至 101 時利潤的變化。

   (b) 求銷售量由 100 增加至 110 時利潤的變化。

5. 某百貨公司由民國 86 年至 95 年營業額的變化率為

$$s'(t)=4t+\frac{10}{t}$$

   其中 s 表示全年營業額（單位：億元）且 $t=1$ 表示為民國 86 年。在民國 86 年時其全年營業額為 24 億元。

   (a) 求該百貨公司於民國 86 年至 95 年的營業額。

   (b) 求民國 90 年時，該百貨公司全年的營業額。

習題 5-4

習題第 1～14 題，求出曲線下與給定的 x 範圍所形成區域的面積。

1. $f(x)=2x+3$，$x=1$ 至 $x=5$。

2. $f(x)=x^2-2$，$x=2$ 至 $x=6$。

3. $f(x)=8x^2$，$x=1$ 至 $x=3$。

4. $f(x)=\frac{1}{x^2}$，$x=1$ 至 $x=3$。

5. $f(x)=8-4\sqrt[3]{x}$，$x=0$ 至 $x=8$。

6. $f(x)=\frac{1}{x}$，$x=e$ 至 $x=e^3$。

7. $f(x)=5x^2+3x-2$，$x=1$ 至 $x=2$。

8. $f(x)=2e^x$，$x=0$ 至 $x=\ln 3$。

9. $f(x)=e^{-x}$，$x=0$ 至 $x=2$。

10. $f(x)=e^{-\frac{1}{2}x}$，$x=0$ 至 $x=2$。

11. $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$，$x=8$ 至 $x=27$。

版權所有

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

12. $f(x)=2x+1+\dfrac{1}{2x}$，$x=1$ 至 $x=2$。

13. $f(x)=x^2-1$，$x=1$ 至 $x=2$。

14. $f(x)=\dfrac{x-2}{x}$，$x=2$ 至 $x=4$。

習題第 15～26 題，求定積分。

15. $\displaystyle\int_2^4 (1+x^{-2})dx$

16. $\displaystyle\int_{-3}^{-1}\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$

17. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x dx$

18. $\displaystyle\int_{-2}^{2}(3w^2-2w)dw$

19. $\displaystyle\int_0^1 (6x^2-4e^{2x})dx$

20. $\displaystyle\int_1^2 \frac{(x+1)^2}{x^2}dx$

21. $\displaystyle\int_1^4 \frac{t+1}{t^2}dt$

22. $\displaystyle\int_3^4 (1-3x+4x^2)dx$

23. $\displaystyle\int_0^8 \sqrt[3]{x}dx$

24. $\displaystyle\int_4^9 \frac{x+\sqrt{x}}{x}dx$

25. $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{x-\sqrt{x}}{3}\right)dx$

26. $\displaystyle\int_0^1 (x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}})dx$

27. 夏天的下午，某城市電力的消耗量為 $-3t^2+15t+20$（百萬瓦／小時），其中 t 表示中午過後 t 小時 $(t\le 6)$，求下午 1 時至 5 時的電力消耗量。

28. 假設某公司的邊際成本 $MC(x)=8e^{-0.01x}$，其中 x 表示產品的單位數量，試求：

(a) 前 100 單位產品的總成本。

(b) 生產 200 至 300 單位的總成本。

29. 某學生記憶單字的速率為 $6e^{-\frac{t}{5}}$（字／分），t 表示經過的時間(分)，求前 10 分鐘該生可記憶的的全部單字數量。

30. 汽車代理商預估汽車之銷售量為 $\dfrac{30}{t}$（輛／月），其中 t 的計量單位為月，且 $t=1$ 表示 1 月份，求由 1 月至 5 月的總銷售量。

31. 一項資產的資產價值可以用該項資產在將來所創造出的連續現金收入的現值總數來衡量之。假設該資產所產生的收入為 $r(t)$（元／年），在連續型的利率水準 i 時

$$(\text{資產價值})=\int_0^T r(t)e^{-it}dt$$

(a) 假設某一油源每年能產生 $r(t)=240{,}000$ 元的收入，在利率 $i=0.06$ 時，利用上述公式求 10 年的資產價值。

(b) 假設某一鈾礦每年能產生 $r(t)=560{,}000$ 元的收入，在利率 $i=0.07$ 時，利用上述公式求 20 年的資產價值。

版權所有

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

32. 經過 t 小時後，工廠的作業員每小時能檢驗的產品數量為 $r(t)$ 分述如下。求該作業員前 3 小時能檢驗的產品數量。

(a) $r(t) = -t^2 + 90t + 10$

(b) $r(t) = -t^2 + 60t + 8$

版權所有

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING