在決策分析的領域裡，常用的一些名詞，如：多準則 (multiple criteria)、多屬性 (multiple attributes)、多目標 (multiple objectives) 等，在語意上，大同小異，但在習慣上，卻賦予了不同的涵意，一般而言，我們將多準則決策 (multiple criteria decision making) 視為一較廣泛的概念，它包括了多目標規劃 (multiple objective programming) 與多屬性決策 (multiple attribute decision making) 兩種決策分析方法，而多目標規劃與多屬性決策的差異，大致可歸納如下：

1. 多屬性決策所評估的可行方案是有限個，而且這些方案在事先是已知的；多目標規劃是利用數學式子來表示所有的可行方案，有無限多個且事先是未知的。
2. 屬性是決策者評估方案的基礎，多屬性決策中，常需瞭解決策者偏好，訂出各屬性相對權重，以便篩選出最佳的方案；多目標規劃則是透過數學模式的求解，得出一組可接受的可行方案。

本章將焦點放在多目標規劃，首先探討多目標規劃之數學模型、解概念及求解方法等，最後再以一實際案例，說明多目標規劃方法之應用技巧。

3.1 基本概念

多目標規劃是數學規劃的一種，可以同時處理兩個或兩個以上的目標函數，其數學模式可寫成：

$$\begin{aligned} &\max\ f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_l(x)) \\ &\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \qquad i = 1, 2, \cdots, m \\ &\qquad\qquad x_j \ge 0 \qquad j = 1, 2, \cdots, n \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中，$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$；$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_l(x)$為$l$個目標函數。

多目標規劃問題中，所謂的最佳解是指可以使所有目標函數極大化的解，但是當l個目標彼此衝突或對立的時候，最佳解是不存在的，因此多目標規劃所討論的解，不是「最佳」的概念，而是「滿意」、「妥協」或「有效率」的概念。

在多目標規劃模型中，限制式$\sum a_{ij}x_j \le b_i,\ i=1, 2, \cdots, m;\ x_j \ge 0,\ j=1, 2, \cdots, n$所構成的集合，稱做可行解區域(以符號$S$表示)；決策者在$S$中所要尋求的解，稱之為效率解(efficient solution)，其定義如下：

某一點$\overline{X} \in S$是有效率的(efficient)，若且唯若不存在任何$X \in S$，使得$f_i(x) \ge f_i(\overline{x}),\ i=1, 2, \cdots, l$且至少某$i_0 \in \{1, 2, \cdots, l\}$，$f_{i_0}(x) > f_{i_0}(\overline{x})$。

由下面例子即可知，可行解區域中，效率解經常不是唯一的，而所有效率解所構成的集合，稱為效率解集合(set of efficient solutions)。

例如，考慮下列包含兩個目標式的多目標規劃問題

$$\begin{aligned} \max \quad & f_1(x) = -2x_1 + x_2 \\ \max \quad & f_2(x) = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 \le 1 \\ & x_1 + x_2 \le 7 \\ & x_1 \le 5 \\ & x_2 \le 3 \\ & x_1,\ x_2 \ge 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

圖3.1中斜線部分代表的是可行解區域，其中由四個角點(0,1)、(2,3)、(4,3)和(5,2)組合而成的線段，即為效率解集合。

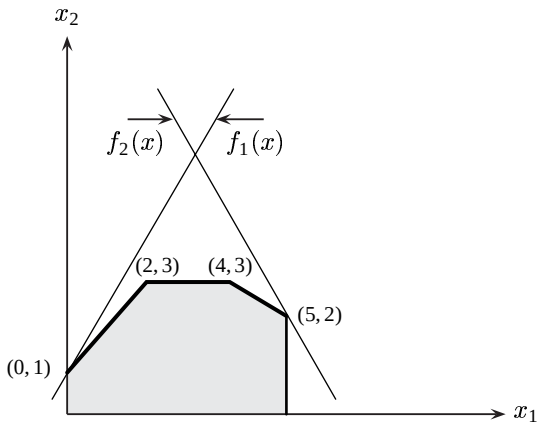


圖 3.1 效率解集合

3.2 多目標單形法

本節所討論的多目標問題乃一多目標線性規劃問題，其數學模式如下：

$$\begin{aligned}
\max\ & f(x) = (f_1(x),\ f_2(x), \cdots, f_l(x)) \\
& f_l(x) = c_{l1}x_1 + c_{l2}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n \\
& \vdots \\
& f_l(x) = c_{l1}x_1 + c_{l2}x_2 + \cdots + c_{ln}x_n \\
\text{s.t.}\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m
\end{aligned} \tag{3.3}$$

其中　$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, \cdots, n$

多目標單形法 (multiobjective simplex method, MSM) 是多目標線性規劃最主要的一種求解方法，其構想源自於一般教科書常

見的單目標線性規劃問題的單形法 (simplex method)，旨在尋找可行解區域中的角點，直到所有效率解均被找到為止。本節所介紹的多目標單形法係摘自 Zeleny (1982) 書中，完全藉由單形表 (MSM tableau) 來進行求解運算。多目標單形表與單目標單形表格式非常相似，只是目標式由一列變成 l 列，其型式如表 3.1：

表 3.1 多目標單形表

	基變數	非基變數	基解
	$x, \cdots, x_r, \cdots, x_m$	$x_{m+1}, \cdots, x_j, \cdots, x_n$	
x_1	$1 \cdots 0 \cdots 0$	$y_{1,m+1}, \cdots, y_{1j}, \cdots, y_{1n}$	x_1^0
$\vdots$	$\vdots \ddots \vdots \quad \vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_r	$0 \quad 1 \quad 0$	$y_{r,m+1}, \cdots, y_{rj}, \cdots, y_{rn}$	x_r^0
$\vdots$	$\vdots \quad \ddots \vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	$0 \cdots 0 \cdots 1$	$y_{m,m+1}, \cdots, y_{mj}, \cdots, y_{mn}$	x_m^0
	$0 \cdots\cdots\cdots 0$	$z_{1,m+1} \cdots z_{1j} \cdots z_{1n}$	$f_1(x^0)$
目標式	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$0 \cdots\cdots\cdots 0$	$z_{l,m+1} \cdots z_{lj} \cdots z_{ln}$	$f_l(x^0)$

在運算過程中，倘若一個解包含 m 個基變數 (basic variable) 和 $(n-m)$ 個等於 0 的非基變數 (nonbasic variable)，則該解稱為基解 (basic solution)，符號通常以上標表示，如 $x_0\left(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0\right)$, $x^1 = \left(x_1^1, x_2^1, \cdots, x_n^1\right), \cdots$。

與單目標單形表一樣，通常是在非基變數中，選擇一變數 x_j，做為進入基底的變數；當 x_j 的值由 0 增加到 1 時，基變數 x_r, $r = 1, 2, \cdots, m$ 的值須減少 y_{rj} 單位，這對於目標函數 f_i 將造成影響，f_i 值的變化為 $z_{ij} = \sum_{r=1}^{m} c_{ir} y_{rj} - c_{ij}$, $i = 1, 2, \cdots, l$。

換言之，若 $z_{ij} < 0$，表示非基變數 x_j 值的增加，有助於 f_i 值的增加；反之，若 $z_{ij} > 0$，則表示 x_j 值的增加，將導致 f_i 值的降低。

茲以下面例子 (Zeleng, 1982)，說明多目標單形法的求解過程

$$\begin{aligned} \max\ & f_1(x) = 10x_1 + 20x_2 \\ \max\ & f_2(x) = 23x_1 + 32x_2 \\ \text{s.t.}\quad & 10x_1 + 6x_2 \le 2500 \\ & 5x_1 + 10x_2 \le 2000 \\ & 7x_1 + 7x_2 \le 2050 \end{aligned} \tag{3.4}$$

其中 $x_1, x_2 \ge 0$

首先，將各限制式加入差額變數 (slack variable)，並以差額變數做為初始基變數。加入差額變數後，模式變成

$$\begin{aligned} \max\ & f_1(x) = 10x_1 + 20x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ \max\ & f_2(x) = 23x_1 + 32x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ \text{s.t.}\quad & 10x_1 + 6x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 2500 \\ & 5x_1 + 10x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 2000 \\ & 7x_1 + 7x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 2050 \end{aligned} \tag{3.5}$$

其中 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$

其對應之初始單形表為

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x^0
x_3	10	6	1	0	0	2500
x_4	5	10	0	1	0	2000
x_5	7	7	0	0	1	2050
f_1	−10	−20	0	0	0	0
f_2	−23	−32	0	0	0	0

表中 z_{ij} 的計算公式為

$$z_{ij} = \sum_{r=1}^{m} c_{ir} \times y_{rj} - c_{ij}$$

在例中，

$$\begin{aligned} z_{11} &= c_{13}y_{31} + c_{14}y_{41} + c_{15}y_{51} - c_{11} \\ &= 0(10) + 0(5) + 0(7) - 10 = -10 \\ z_{12} &= c_{13}y_{32} + c_{14}y_{42} + c_{15}y_{52} - c_{12} \\ &= 0(6) + 0(10) + 0(7) - 20 = -20 \end{aligned}$$

同理，

$$z_{21} = -23,\ z_{22} = -32$$

對於任意一個非基變數 x_j，若其對應行 (column) 中，至少有一個 $i = 1, \cdots, m, y_{ij} > 0$，則 x_j 可做為進入基底的一個變數，計算

$$\theta_j = \min_i \left\{ \frac{x_i^0}{y_{ij}} \middle| y_{ij} > 0 \right\}$$

設 $\dfrac{x_r^0}{y_{rj}} = \theta_j$，則基變數 x_r 可被選為退出基底的變數，也就是 x_r 由基變數轉變成非基變數。這時，目標函數的變化為

$$f_i^1 = f_i^0 - \theta_j z_{ij} \qquad i = 1, 2, \cdots, l$$

在本例中，可選擇 x_2 進入基底，由於

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \min \left\{ \frac{2500}{6}, \frac{2000}{10}, \frac{2050}{7} \right\} \\ &= \frac{2000}{10} \end{aligned}$$

所以 x_4 可做為退出基底的變數。經由列運算，可得到下面單形表

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x^1
x_3	7	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	1300
x_4	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{10}$	0	200
x_5	$\frac{7}{2}$	0	0	$-\frac{7}{10}$	1	650
f_1	0	0	0	2	0	4000
f_2	-7	0	0	$\frac{16}{5}$	0	6400

針對第 i 個目標式，若對應於非基變數的 z_{ij} 均大於或等於 0，則 f_i 在單形表中的值為最大值，表中的解為一效率解。

上表中，可選擇 x_1 進入基底，計算

$$\theta_1 = \min\left\{\frac{1300}{7}, \frac{200}{\frac{1}{2}}, \frac{650}{\frac{7}{2}}\right\} = \frac{1300}{7}$$

此時，x_3, x_5 均可選為退出基底的變數；今選擇 x_3 退出基底，再利用列運算，得到下表

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x^2
x_1	1	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{35}$	0	$\frac{1300}{7}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{14}$	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{750}{7}$
x_5	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	1	0
f_1	0	0	0	2	0	4000
f_2	0	0	1	$\frac{13}{5}$	0	7700