1. 大量生產或連續生產。
2. 雖非大量或連續生產，但係重複性生產。

另方面，管制圖繪製之目的既是要瞭解製程變異之情況，且針對異常狀況進行檢討改善，故其主要作用乃是作為監控未來之生產用。若僅為了瞭解現行製造品之品質狀況，但未來不可能再生產相同或類似之產品，則大可不必煞費周章繪製管制圖，因此時已不符合管制圖使用之目的。

## 4.2 平均數與全距 ($\overline{X}-R$) 管制圖

$\overline{X}-R$ 管制圖係將 $\overline{X}$ 管制圖與 $R$ 管制圖兩者合併使用，亦即，當利用檢驗數據評估製程時，除需瞭解其平均數隨時間之變化外，亦需瞭解其變異大小之變化情形，$\overline{X}$ 管制圖即用以瞭解製程平均數變化之狀況，而 $R$ 管制圖則用來瞭解製程變異變化之情形。本節將先介紹兩圖之管制界限公式，再以範例說明 $\overline{X}-R$ 管制圖之應用。

### 4.2.1 $\overline{X}-R$ 管制圖管制界限公式

我們首先說明 $\overline{X}$ 管制圖與 $R$ 管制圖之計算公式。由於管制圖依使用之目的可分成解析用及監控用兩種，而在公式方面亦分為製程平均數 $\mu$ 及標準差 $\sigma$ 未知與已知兩種情況：通常開始使用管制圖時，製程平均數及標準差均未知，建立管制圖之目的在於解析製程是否呈穩定狀況，待經一段時間之使用後，逐漸可掌握製程參數，此時即可依製程平均數及標準差已知之公式建立監控用之管制圖。

設共抽取 $k$ 個樣本組，每組內含 $n$ 個樣本。對 $\overline{X}$ 管制圖而言，若第 $i$ 組之量測值平均數為 $\overline{X}_i$，則 $\overline{X}_i$ 即為該組內 $n$ 個樣本量測值之平均，即

$$\overline{X}_i=\frac{\sum_{j=1}^{n}X_{ij}}{n}$$

著作權所有 侵害必究

華泰文化 HWA TAI PUBLISHING

其中，$X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{in}$ 為第 $i$ 組的 $n$ 個量測值，而全部 $k$ 個樣本組之平均數 $\overline{\overline{X}}$ 為

$$\overline{\overline{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \overline{X}_i}{k}$$

一般而言，組數至少要 20 組 ($k \geq 20$) 方能估算管制上、下限。

對 $R$ 管制圖而言，若第 $i$ 組之量測值全距為 $R_i$，則 $R_i$ 即為該組內 $n$ 個樣本之最大值減最小值，即

$$R_i = (X_{\max} - X_{\min})$$

而全部 $k$ 個樣本組之全距平均數 $\overline{R}$ 為

$$\overline{R} = \frac{\sum_{i=1}^{k} R_i}{k}$$

茲介紹 $\overline{X}-R$ 管制圖之管制界限公式如下，公式中之係數 $A_2$、$D_4$、$D_3$、$A$、$D_2$、$D_1$、$d_3$、$d_2$，均可由表 4.1 查得。

1. 在製程 $\mu$ 及 $\sigma$ 未知情況下：

$\overline{X}$ 管制圖：

$$\begin{cases} \text{管制上限} & \text{UCL}_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} + 3\sigma_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} + \dfrac{3\overline{R}}{d_2\sqrt{n}} = \overline{\overline{X}} + A_2\overline{R} \\ \text{中心線} & \text{CL}_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} \\ \text{管制下限} & \text{LCL}_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} - 3\sigma_{\overline{X}} = \overline{\overline{X}} - \dfrac{3\overline{R}}{d_2\sqrt{n}} = \overline{\overline{X}} - A_2\overline{R} \end{cases}$$

$R$ 管制圖：

$$\begin{cases} \text{管制上限} & \text{UCL}_R = \overline{R} + 3\sigma_R = D_4\overline{R} \\ \text{中心線} & \text{CL}_R = \overline{R} \\ \text{管制下限} & \text{LCL}_R = \overline{R} - 3\sigma_R = D_3\overline{R} \end{cases}$$

2. 在製程 $\mu$ 及 $\sigma$ 已知情況下：

$\overline{X}$ 管制圖：

$$\begin{cases} \text{管制上限} & \text{UCL}_{\overline{X}} = \mu + A\sigma \\ \text{中心線} & \text{CL}_{\overline{X}} = \mu \\ \text{管制下限} & \text{LCL}_{\overline{X}} = \mu - A\sigma \end{cases}$$

著作權所有 侵害必究



華泰文化 HWA TAI PUBLISHING

$R$管制圖：

$$\begin{cases} \text{管制上限} & \text{UCL}_R = D_2\sigma \\ \text{中心線} & \text{CL}_R = d_2\sigma \\ \text{管制下限} & \text{LCL}_R = D_1\sigma \end{cases}$$

各係數間有如下之關係：

$$A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}}, \quad A = \frac{3}{\sqrt{n}}, \quad D_3 = 1 - \frac{3d_3}{d_2}, \quad D_4 = 1 + \frac{3d_3}{d_2},$$

$$D_1 = d_2 - 3d_3, \quad D_2 = d_2 + 3d_3, \quad d_2 = \frac{\overline{R}}{\sigma}, \quad d_3 = \frac{\sigma_R}{\sigma}。$$

註：$d_3$為全距分配之標準差與母體標準差之比值；$d_2$為以$\overline{R}$估計$\sigma$之調整係數。

❑表 4.1　$\overline{X} - R$管制圖管制界限係數表

| $n$ | $A_2$ | $D_4$ | $D_3$ | $A$ | $D_2$ | $D_1$ | $d_2$ | $d_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1.880 | 3.267 | 0.000 | 2.121 | 3.686 | 0.000 | 1.128 | 0.853 |
| 3 | 1.023 | 2.575 | 0.000 | 1.732 | 4.358 | 0.000 | 1.693 | 0.888 |
| 4 | 0.729 | 2.282 | 0.000 | 1.500 | 4.698 | 0.000 | 2.059 | 0.880 |
| 5 | 0.577 | 2.115 | 0.000 | 1.342 | 4.918 | 0.000 | 2.326 | 0.864 |
| 6 | 0.483 | 2.004 | 0.000 | 1.225 | 5.078 | 0.000 | 2.534 | 0.848 |
| 7 | 0.419 | 1.924 | 0.076 | 1.134 | 5.203 | 0.205 | 2.704 | 0.833 |
| 8 | 0.373 | 1.864 | 0.136 | 1.061 | 5.307 | 0.387 | 2.847 | 0.820 |
| 9 | 0.337 | 1.816 | 0.184 | 1.000 | 5.394 | 0.546 | 2.970 | 0.808 |
| 10 | 0.308 | 1.777 | 0.223 | 0.949 | 5.469 | 0.687 | 3.078 | 0.797 |

## 4.2.2 $\overline{X} - R$管制圖繪製範例

$\overline{X} - R$管制圖之繪製與應用，其實施步驟以範例說明如下。

**範例 ▸ 4-1**

某公司為管制其生產之材料硬度，自2月1日起連續4天每天抽取5組樣本，每組樣本均含4個樣本之測定值，資料如表4.2所示（表中平均數$\overline{X}$、全距$R$及管制界限係步驟二至步驟四所得），請計算$\overline{X} - R$管制界限並繪製管制圖。

著作權所有 侵害必究

華泰文化 HWA TAI PUBLISHING

解

依下列步驟進行：

步驟一：蒐集資料。

建立 $\overline{X}-R$ 管制圖需取 20～30 組樣本，每組樣本以 2～6 個樣本為一組（檢驗費用高則每組取 2～3 個，需更嚴格之製程管制則每組取 6 個以上，通常一般取 4 或 5 個），將每個樣本之測定值填入紀錄表（如表 4.2）內，並填寫相關資訊（產品名稱、生產單位、品質特性、檢驗單位、檢驗員、檢驗方式、日期等資料），以供追查之用。

步驟二：計算各組平均值 $\overline{X}$。

例如表 4.2 中第 1 組數據

$$\overline{X}=\frac{\text{樣本測定值之和}\left(\sum X\right)}{\text{樣本數}\,(n)}=\frac{318.3}{4}=79.575$$

步驟三：計算各組全距 $R$。

全距為組內最大值與最小值之差，例如表 4.2 中第 1 組數據

$R=$ 組內最大值 $-$ 組內最小值 $=80.5-78.9=1.6$

步驟四：計算全部數據之總平均值 $\overline{\overline{X}}$ 及全距之平均值 $\overline{R}$。

$$\overline{\overline{X}}=\frac{\text{各組平均數之和}\left(\sum \overline{X}\right)}{\text{總組數}(k)}=\frac{1{,}572}{20}=78.6$$

$$\overline{R}=\frac{\text{各組全距之和}\left(\sum R\right)}{\text{總組數}(k)}=\frac{33.3}{20}=1.665$$

步驟五：計算試用管制界限。

$\overline{X}$ 管制圖之上、下管制界限及中心線計算如下：

查表 4.1，當 $n=4$ 時，得 $A_2=0.729$、$D_4=2.282$、$D_3=0$，故

$$\text{CL}_{\overline{X}}=\overline{\overline{X}}=78.6$$

$$\text{UCL}_{\overline{X}}=\overline{\overline{X}}+A_2\overline{R}=78.6+0.729\times 1.665=79.81$$

$$\text{LCL}_{\overline{X}}=\overline{\overline{X}}-A_2\overline{R}=78.6-0.729\times 1.665=77.39$$

著作權所有 侵害必究



華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

❑表 4.2　$\overline{X}-R$ 管制圖數據紀錄表

產品名稱：RCS103合金材料　　生產單位：製一課
品質特性：硬度　　檢驗單位：品一組
檢 驗 員：○○○　　日　　期：自××年2月1日
檢驗方式：硬度測試機　　至××年2月4日

| 組號 | 檢驗日期（月／日） | 測定值 | | | | 平均數 $\overline{X}$ | 全距 $R$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | | |
| 1 | 2/1 | 80.5 | 78.9 | 79.0 | 79.9 | 79.575 | 1.6 |
| 2 | | 80.5 | 81.0 | 76.4 | 78.8 | 79.175 | 4.6 |
| 3 | | 79.0 | 79.6 | 78.0 | 79.8 | 79.100 | 1.8 |
| 4 | | 79.3 | 79.1 | 78.8 | 79.1 | 79.075 | 0.5 |
| 5 | | 79.6 | 79.9 | 79.0 | 78.9 | 79.350 | 1.0 |
| 6 | 2/2 | 78.0 | 78.2 | 76.2 | 77.8 | 77.550 | 2.0 |
| 7 | | 78.4 | 78.1 | 77.9 | 77.7 | 78.025 | 0.7 |
| 8 | | 79.1 | 79.5 | 79.3 | 79.1 | 79.250 | 0.4 |
| 9 | | 78.0 | 77.3 | 77.9 | 77.5 | 77.675 | 0.7 |
| 10 | | 78.1 | 78.2 | 79.0 | 77.8 | 78.275 | 1.2 |
| 11 | 2/3 | 79.2 | 79.6 | 78.9 | 79.6 | 79.325 | 0.7 |
| 12 | | 78.9 | 78.5 | 79.1 | 80.0 | 79.125 | 1.5 |
| 13 | | 79.6 | 80.1 | 80.5 | 80.4 | 80.150 | 0.9 |
| 14 | | 78.6 | 78.5 | 76.3 | 77.2 | 77.650 | 2.3 |
| 15 | | 76.8 | 77.0 | 78.7 | 79.6 | 78.025 | 2.8 |
| 16 | 2/4 | 78.0 | 78.7 | 76.0 | 78.7 | 77.850 | 2.7 |
| 17 | | 77.4 | 79.7 | 77.4 | 79.7 | 78.550 | 2.3 |
| 18 | | 79.1 | 78.3 | 76.5 | 76.4 | 77.575 | 2.7 |
| 19 | | 77.1 | 77.5 | 78.4 | 78.5 | 77.875 | 1.4 |
| 20 | | 78.8 | 78.2 | 78.6 | 79.7 | 78.825 | 1.5 |
| | | | | | 合計 | 1,572 | 33.3 |
| | | | | | 平均 | 78.6 | 1.665 |

$\overline{X}$ 管制圖：

$$\mathrm{CL}_{\overline{X}}=\overline{\overline{X}}=78.6$$

$$\mathrm{UCL}_{\overline{X}}=\overline{\overline{X}}+A_2\overline{R}=78.6+0.729\times1.665=79.81$$

$$\mathrm{LCL}_{\overline{X}}=\overline{\overline{X}}-A_2\overline{R}=78.6-0.729\times1.665=77.39$$

$R$ 管制圖：

$$\mathrm{CL}_R=\overline{R}=1.665$$

$$\mathrm{UCL}_R=D_4\overline{R}=2.282\times1.665=3.80$$

$$\mathrm{LCL}_R=D_3\overline{R}=0\times1.665=0$$

著作權所有 侵害必究

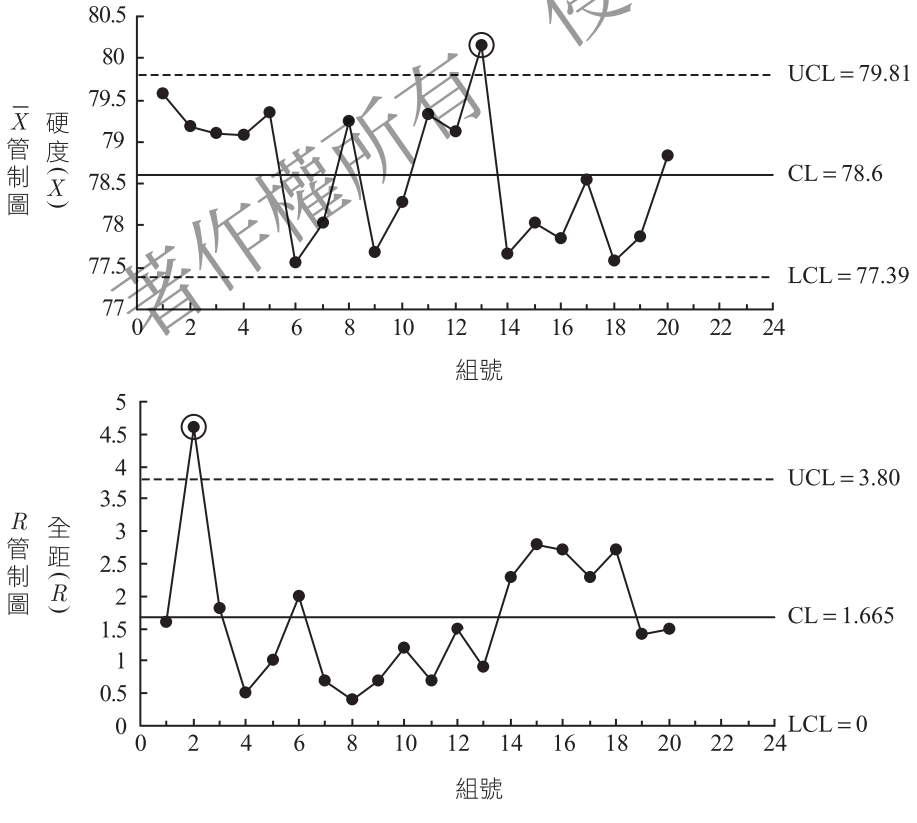
華泰文化 HWA TAI PUBLISHING

$R$管制圖之上、下管制界限及中心線計算式如下：

$$\text{CL}_R = \overline{R} = 1.665$$
$$\text{UCL}_R = D_4\overline{R} = 2.282 \times 1.665 = 3.80$$
$$\text{LCL}_R = D_3\overline{R} = 0 \times 1.665 = 0$$

步驟六：將試用之上、下管制界限及中心線繪於管制圖用紙上，中心線為實線，上、下管制界限為虛線，且上、下管制界限之間距應夠寬，以便觀察樣本點分佈狀況。

步驟七：將每組數據之$\overline{X}$及$R$值分別點繪於$\overline{X}$、$R$管制圖上，每個點與點之間應保持適當之相等距離，以便觀察；且將管制圖管制界限內之點以「•」表示，管制界限外之點以「◉」（或其他符號）表示，以便於區別。繪製之$\overline{X} - R$管制圖如圖4.3所示，此管制圖係供分析製程之用，為解析用管制圖。




❑圖 4.3　範例 4-1 之$\overline{X} - R$管制圖

著作權所有 侵害必究



華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

步驟八：研判製程是否在管制或穩定狀態下，以決定是否修正管制界限。（管制圖異常趨勢及變化樣式之判讀，請參考第 7 章第 7.6 節）

1. 若管制圖上之樣本點分佈同時均滿足下列條件時，即可判斷製程是在管制狀態下：
   (1) 沒有任何一點超出管制界限。
   (2) 樣本點呈隨機分佈，未呈特定趨勢或有週期性出現。
2. 製程若判斷為呈穩定之管制狀態下，則延長原管制界限，作為監控後續之製程管制用。
3. 若製程判斷為不在管制狀態下，則須追查原因，並採取改善措施，同時將異常點之數據去除，再重新計算修正後之管制界限。但若不能針對異常現象分析原因而採取改善行動，則不必重新計算管制界限，只需延長原有管制界限，繼續進行製程管制。

步驟九：摒棄異常值，重新計算修正後管制界限。由圖 4.3 知，在 $\overline{X}$ 管制圖上有一點（第 13 組資料）落於上管制界限外，$R$ 管制圖上亦有一點（第 2 組資料）落於上管制界限外，均研判為異常，經進一步追查原因（可從人、機器、物料、方法、環境等 5M 方向分析），可改善後，將此異常資料摒除之。今將第 2 組與第 13 組兩組之資料均捨去，剩餘 18 組，重新計算 $\overline{X}$ 與 $R$ 圖之修正後管制界限。

$\overline{X}$ 管制圖：

$$\begin{aligned} \text{CL}_{\overline{X}} &= \overline{\overline{X}} = 78.48 \\ \text{UCL}_{\overline{X}} &= \overline{\overline{X}} + A_2\overline{R} = 78.48 + 0.729 \times 1.54 = 79.60 \\ \text{LCL}_{\overline{X}} &= \overline{\overline{X}} - A_2\overline{R} = 78.48 - 0.729 \times 1.54 = 77.36 \end{aligned}$$

$R$ 管制圖：

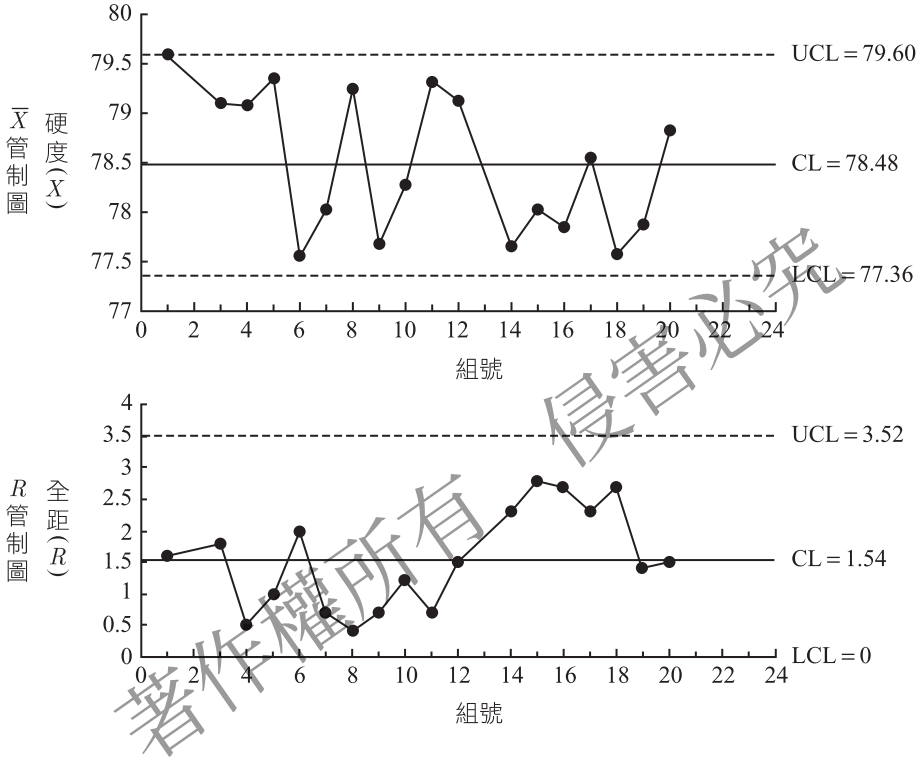
$$\begin{aligned} \text{CL}_R &= \overline{R} = 1.54 \\ \text{UCL}_R &= D_4\overline{R} = 2.282 \times 1.54 = 3.52 \\ \text{LCL}_R &= D_3\overline{R} = 0 \times 1.54 = 0 \end{aligned}$$

著作權所有 侵害必究

華泰文化 HWA TAI PUBLISHING

步驟十：繪製修正後 $\overline{X}-R$ 管制圖。

將去除異常值後之資料重繪於修正後之管制圖上，如圖 4.4 所示。由圖中可知所有樣本點均在管制界限內，且未呈異常變化樣式或趨勢，我們因此可研判製程呈穩定之管制狀態。




❑圖 4.4　修正後 $\overline{X}-R$ 管制圖

步驟十一：繼續使用修正後管制界限，觀察製程變異是否均在管制狀態，如仍尚未在管制狀態，應繼續追查原因改善後再重新修正管制界限以迄製程呈穩定之管制狀態時為止，方可供未來繼續使用。

步驟十二：將修正後管制界限與規格比較，如修正後管制界限之變異較規格公差小，則此修正後管制界限可供未來繼續使用；否則需再修正管制界限。製程之變異可由製程標準差 $\sigma=\overline{R}/d_2$ 推估，再藉製程能力（第 5 章）分析與規格相較，判斷此製程是否能生產出符合規格之產品。

著作權所有　侵害必究



華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

步驟十三：若製程呈管制狀態，其變異亦均較規格公差為小，則經一段期間累積相當資料後，可推得製程平均數 $\mu$ 及標準差 $\sigma$，並藉以訂定正式監控用之管制圖。

本例中，若圖 4.4 之修正管制界限經繼續使用三個月後，製程均一直保持在管制狀態，且變異亦均較規格公差為小，設累積大量數據後，得硬度製程平均數 $\mu = 78.50$、標準差 $\sigma = 0.72$，則可建立正式監控用之管制界限。

$\overline{X}$ 管制圖：

$$\begin{aligned} \text{UCL}_{\overline{X}} &= \mu + A\sigma = 78.50 + 1.500 \times 0.72 = 79.58 \\ \text{CL}_{\overline{X}} &= \mu = 78.50 \\ \text{LCL}_{\overline{X}} &= \mu - A\sigma = 78.50 - 1.500 \times 0.72 = 77.42 \end{aligned}$$

$R$ 管制圖：

$$\begin{aligned} \text{UCL}_R &= D_2\sigma = 4.698 \times 0.72 = 3.38 \\ \text{CL}_R &= d_2\sigma = 2.059 \times 0.72 = 1.48 \\ \text{LCL}_R &= D_1\sigma = 0 \times 0.72 = 0 \end{aligned}$$

著作權所有 侵害必究

## 4.3 平均數與標準差（$\overline{X}-S$ 或 $\overline{X}-\sigma$）管制圖

傳統上，在瞭解製程平均與變異時，$\overline{X}-R$ 管制圖是被使用較廣泛者，其中主要原因有三：(1) 以往品檢及現場人員受過統計訓練者不多，對標準差之意義不明白，更對母群體標準差 $\sigma$ 與樣本標準差 $S$ 為何公式不同（$\sigma$ 公式中分母為個數 $N$，$S$ 公式中分母為個數 $n-1$），無法理解（即使學過統計者，亦不見得人人都懂），致不敢貿然使用標準差來作為衡量樣本間變異情形之參數。反之，全距之意義稍一解釋，眾皆了然，容易接受。(2) 以全距 $R$ 來衡量變異較以標準差 $\sigma$（或 $S$）來衡量，在計算上要簡易得多。這在以往電腦或掌上型計算機尚不普遍時，尤其明顯。(3) 傳統製造業之產品精密度要求未若今日高科技產業，不需在製程管制計算之要求上錙銖必較。

華泰文化 HWA TAI PUBLISHING