其中 C_x^n 乃組合符號，表示 n 次試驗中，成功 (y) 的次數有 x 次，而失敗 (z) 次數有 $n-x$ 次，則其可能情形共有 C_x^n 個，此即二項係數。就本例而言，$n=3$，故成功 x 次，失敗 $(3-x)$ 次的可能情形有 C_x^3 個。

根據例 6.3 的說明，我們可推導出二項分配的一般式：假設進行 n 次貝努利試驗（n 為固定常數），且每一次試驗中，成功之機率為 p，以隨機變數 X 代表 n 次試驗中成功之次數，則隨機變數 X 稱為**二項隨機變數**(binomial random variable)，其機率分配稱為**二項分配**(binomial distribution)。令 X 之機率分配為 $f(x)$，則 $f(x)$ 如下：

$$f(x)=C_x^n p^x q^{n-x}，x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{6-1}$$

式中 $q=1-p$ 代表失敗的機率。

二項分配公式一般以符號 $b(n,\ p)$ 表示，就例 6.3 而言，隨機變數 X 的二項分配為 $X\sim b(3,\ 0.3)$。

6.1.1 小節中我們曾提及貝努利試驗，設其隨機變數 X，則 X 的機率分配 $f(x)$（稱為**貝努利分配**(Bernoulli distribution)）乃 $n=1$ 之二項分配的特例，即：

$$f(x)=p^x q^{1-x}，x=0,\ 1 \tag{6-2}$$

因此，貝努利分配 $f(x)$ 亦可用符號 $b(1,\ p)$ 表示。

著作權所有 侵害必究

例題 6.4

投擲一公平的骰子五次，求恰好出現三次 2 點的機率。

解 令 X 代表出現 2 點的次數，則其成功（出現 2 點）機率為 $\frac{1}{6}$，而失敗（未出現 2 點）的機率為 $\frac{5}{6}$，因此 X 為二項分配 $b\left(5,\ \frac{1}{6}\right)$，即：

$$f(x)=C_x^5\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{5-x}$$

$$x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

所以，恰好出現三次 2 點的機率為：

$$f(3)=C_3^5\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{5!}{3!2!}\frac{5^2}{6^5}=0.032$$

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

接著，我們探討二項分配的期望值與變異數。設 X_i 為貝努利隨機變數，因其機率分配為：

$$f(x_i) = p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}\text{，}x_i = 0,\ 1$$

式中 p 表示成功的機率，故其期望值與變異數分別為（請讀者自行驗證之）：

$$E(X_i) = p\text{，}Var(X_i) = p(1-p)$$

由前述可知，n 次試驗的二項隨機變數 X 乃由 n 個 X_i 所組成，且各 X_i 之間彼此獨立，即：

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

且 $X \sim b(n,\ p)$。因此，X 的期望值為：

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) \\ &= \underbrace{p + p + \cdots + p}_{n\text{項}} \\ &= np \end{aligned}$$

同理，X 的變異數為：

$$\begin{aligned} Var(X) &= Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \\ &= Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_n) \\ &= \underbrace{p(1-p) + p(1-p) + \cdots + p(1-p) + \cdots + p(1-p)}_{n\text{項}} \\ &= np(1-p) \end{aligned}$$

例題 6.5

試計算例 6.4 中二項隨機變數 X 的期望值與變異數。

解 由例 6.4 知，$X \sim b\left(5,\ \frac{1}{6}\right)$，因此：

$$E(X) = 5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$Var(X) = 5 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

著作權所有 侵害必究
華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

期望值為 $\frac{5}{6}$，其意義為：在投擲一骰子五次中，平均而言會有 $\frac{5}{6}$ 次出現 2 點。另外，由變異數 $\frac{25}{36}$ 可算出其標準差：

$$Sd(X)=\sqrt{Var(X)}=\sqrt{\frac{25}{36}}=\frac{5}{6}$$

6.1.3 二項分配查表法

在求二項分配的機率值時，其計算工作很繁雜，此時只要 $b(n, p)$ 中的 n 不超過 25，則可利用查表法求出機率。在查表前要先確定 n 與 p 的值，然後再由該表中找出對應的 C 值，即可求得累積機率 $P(X\le C)=\sum_{x=0}^{c} f(x)$。茲以下面兩個表列說明查表法：

二項分配

x 值	機率 $f(x)$
0	$f(0)$
1	$f(1)$
2	$f(2)$
⋮	⋮
⋮	⋮
n	$f(n)$
總計	1

附錄表 2

C	表中數據的意義
0	$f(0)$
1	$f(0)+f(1)$
2	$f(0)+f(1)+f(2)$
⋮	⋮
⋮	⋮
n	$f(0)+f(1)+\cdots+f(n)=1$

某 x 之機率可由本書後面之附錄表 2 中兩個連續數據相減而得。例如：

$$P(X=2)=f(2)=P(X\le 2)-P(X\le 1)$$
$$=（表中\ C=2\ 之值）-（表中\ C=1\ 之值）$$

例題 6.6

假定某一新藥品能治癒某疾病的機率為 0.4，如果以 15 個病患進行試驗，試求下列機率：(a) 最多 6 個人治癒；(b) 治癒的人數介於 6 與 10 之間（包含 6 與 10）；(c) 治癒人數至少 12 個人（含 12）；(d) 恰有 5 人治癒。

解 令 X 代表治癒的人數，則 X 為二項分配 $X\sim b(15, 0.4)$。查附錄表 2 中，$n=15$ 與 $p=0.4$ 的數據：

著作權所有 侵害必究
華泰文化 HWA TAI PUBLISHING

(a) $P(X \le 6) = 0.610$；可直接由表中 $C = 6$ 之列查出。

(b) $P(6 \le X \le 10) = f(6) + f(7) + f(8) + f(9) + f(10)$

表中 $C = 10$ 之對應數據為：

$$P(X \le 10) = 0.991$$

表中 $C = 5$ 之對應數據為：

$$P(X \le 5) = 0.403$$

因此，

$$\begin{aligned} P(6 \le X \le 10) &= P(X \le 10) - P(X \le 5) \\ &= 0.991 - 0.403 = 0.588 \end{aligned}$$

(c) 計算 $P(X \ge 12)$：

$$\begin{aligned} P(X \ge 12) &= 1 - P(X \le 11) \quad （查 C = 11 之對應數據） \\ &= 1 - 0.998 \\ &= 0.002 \end{aligned}$$

(d) 計算 $P(X = 5)$：

$$\begin{aligned} P(X = 5) = f(5) &= P(X \le 5) - P(X \le 4) \\ &= 0.403 - 0.217 = 0.186 \end{aligned}$$

版權所有 侵害必究

6.2 超幾何分配

在前一節例 6.3 中，自裝有 10 個球（3 個紅球與 7 個白球）的箱中抽出 3 個球，若採用放回抽樣，此為獨立的情況，屬於二項實驗；但若採用不放回抽樣，則每次試驗（抽球）不為獨立，且每次抽出紅球（成功）的機率亦不同，此時不再為二項實驗。對於這種不獨立的抽樣實驗，乃與**超幾何實驗** (hypergeometric experiment) 有關。以下我們先以例 6.3 中不放回抽樣的情況為例子，說明其機率分配的求法。然後根據求機率分配的觀念說明超幾何實驗及超幾何分配的一般數學式。

例題 6.7

在例 6.3 中，採不放回抽樣方式抽出 3 個球，令 X 代表紅球的個數，試求出 X 的機率分配。

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

解 X 表紅球的個數，故其可能值為 $x = 0, 1, 2, 3$，茲分別求其機率值如下：

$$f(0) = \frac{C_0^3 C_3^7}{C_3^{10}} = \frac{7}{24}，\quad f(1) = \frac{C_1^3 C_2^7}{C_3^{10}} = \frac{21}{40}$$

$$f(2) = \frac{C_2^3 C_1^7}{C_3^{10}} = \frac{7}{40}，\quad f(3) = \frac{C_3^3 C_0^7}{C_3^{10}} = \frac{1}{120}$$

$f(x)$ 之表格形式與數學式如下：

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$

$$f(x) = \frac{C_x^3 C_{3-x}^7}{C_3^{10}}，x = 0, 1, 2, 3$$

6.2.1 超幾何實驗與超幾何分配

由上面這個例子的說明有助於我們推導超幾何分配的一般式，而在推導超幾何分配之前，我們先介紹超幾何實驗。

從一大小為 N 的有限母體中抽出一大小為 n 的樣本（不放回抽樣），若母體僅含兩類物品，一類為「成功」，另一類為「失敗」，其中成功類物品有 S 個，失敗類物品有 $N - S$ 個，則所抽出之成功類個數定義為 x，而失敗類物品為 $n - x$，此種抽樣實驗稱為超幾何實驗。茲將超幾何實驗的性質摘述如下：

超幾何實驗的特性

(1) 從一含有 N 物的有限母體中，採不放回抽樣抽出大小為 n 的隨機樣本。
(2) N 物中有 S 個屬成功類，另 $N - S$ 個屬失敗類。

超幾何實驗中的成功類個數 X，稱為**超幾何隨機變數** (hypergeometric random variable)，而 X 的機率分配稱為**超幾何分配** (hypergeometric distribution)。根據例 6.7，我們應可推導出超幾何分配的一般公式：

超幾何分配

$$f(x) = \frac{C_x^S C_{n-x}^{N-S}}{C_n^N} \tag{6-3}$$

式中的符號 N, S, n, x 皆同於前文所述，另外 x 的範圍是從 $\text{Max}\{0, n - (N - S)\}$ 至 $\text{Min}\{n, S\}$。

著作權所有 侵害必究
華泰文化 HWA TAI PUBLISHING

例題 6.8

從 6 男 3 女中隨機取 4 人組成委員會，求此委員會中男性人數的機率分配。

解 令隨機變數 X 代表此委員會中的男性人數，則其滿足超幾何實驗的二個特性，故其機率分配如下：

$$f(x)=\frac{C_x^6 C_{4-x}^3}{C_4^9}，x=1,\ 2,\ 3,\ 4$$

查附錄表 1 的組合 C_x^n 值，可計算出個別的機率值如下：

$$f(1)=\frac{6}{126}=0.048，\quad f(2)=\frac{45}{126}=0.357$$

$$f(3)=\frac{60}{126}=0.476，\quad f(4)=\frac{15}{126}=0.119$$

若欲進一步求出抽出的 4 位成員中，至少有 3 人是男性的機率，則可計算 $P(X\geq 3)$：

$$P(X\geq 3)=f(3)+f(4)=\frac{60}{126}+\frac{15}{126}$$

$$=0.476+0.119=0.595$$

接下來我們介紹超幾何分配的期望值與變異數。此時我們亦可仿照二項分配的觀念，令超幾何隨機變數 X 為：

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_n$$

其中 X_i 之值視第 i 次抽取之成功或失敗而為 1 或 0。然而，因為 X_i 之間不再是獨立，且每一 X_i 為 1 或 0 的機率皆不盡相同，故其期望值與變異數的求取顯然要複雜許多。因此，僅將結果列述如下：

令 X 代表超幾何隨機變數，則其期望值與變異數分別為：

$$E(X)=n\cdot p \tag{6-4}$$

$$Var(X)=\frac{N-n}{N-1}np(1-p) \tag{6-5}$$

式中 $p=\frac{S}{N}$。

例題 6.9

試計算例 6.7 中 X 之機率分配的期望值與變異數，以驗證 (6-4) 與 (6-5) 式。

著作權所有 侵害必究
華泰文化 HWA TAI PUBLISHING

解 例 6.7 中 X 為超幾何分配，其中 $N=10$，$n=3$，$S=3$。依例 6.7 中 X 的機率分配計算期望值與變異數，並加以驗證：

$$E(X)=0\times\frac{7}{24}+1\times\frac{21}{40}+2\times\frac{7}{40}+3\times\frac{1}{120}$$
$$=\frac{9}{10}=n\cdot\frac{S}{N}$$

而：

$$E(X^2)=0\times\frac{7}{24}+1\times\frac{21}{40}+4\times\frac{7}{40}+9\times\frac{1}{120}$$
$$=\frac{13}{10}$$

故，

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{13}{10}-\left(\frac{9}{10}\right)^2$$
$$=\frac{49}{100}=\frac{N-n}{N-1}\cdot n\cdot\frac{S}{N}\cdot\left(1-\frac{S}{N}\right)$$

6.2.2 超幾何分配與二項分配的關係

根據本節前面的討論，我們發現超幾何分配與二項分配之間具有密切的關係。茲以抽球問題（自 N 項物品中取出 n 個物品）為例。若以放回抽樣方式，則為獨立的情況，其隨機變數（定義為成功物品個數）之機率分配屬二項分配；反之，若採不放回抽樣方式，且當母體為有限的時候，則為非獨立的情況，其隨機變數之機率分配屬超幾何分配。

另外，我們比較二項分配與超幾何分配之期望值與變異數，可發現兩者的期望值皆相同，但變異數稍有不同。由於超幾何分配屬非獨立情況，故須加上一**校正因子**(correcting factor)$\frac{N-n}{N-1}$。但此校正因子在 n 相對於 N 甚小時，則每次抽樣（試驗）其機率的變動相當小，此時我們便可用 $p=\frac{S}{N}$ 的二項分配來逼近此超幾何分配。一般而言，當 $\frac{n}{N}\le 0.05$ 時，二項分配會是超幾何分配的良好近似值。事實上，當 $\frac{n}{N}\le 0.05$ 時，校正因子可修改如下：

$$\text{校正因子}=\frac{N-n}{N-1}=\frac{1-\frac{n}{N}}{1-\frac{1}{N}}\approx 1$$

因此，二項分配的變異數近似於超幾何分配者；也就是說，此時以二項分配來逼近超幾何分配，結果將頗為理想。

版權所有 侵害必究
華泰文化 HWA TAI PUBLISHING

下面我們利用表 6.1 來比較二項分配與超幾何分配的機率值。表 6.1 的左邊，$\frac{n}{N}=\frac{5}{10}=0.5$，結果二項機率值與超幾何機率值相差頗大；而表 6.1 右邊，$\frac{n}{N}=\frac{5}{100}=0.05$，此時二項機率值與超幾何機率值則頗為相近。

表 6.1　二項分配與超幾何分配之比較

$(n=5)$

x	$p=0.5$，$N=10$，$S=5$		$p=0.5$，$N=100$，$S=50$	
	二項	超幾何	二項	超幾何
0	0.0313	0.0040	0.0313	0.0281
1	0.1563	0.1991	0.1563	0.1529
2	0.3125	0.3968	0.3125	0.3189
3	0.3125	0.3968	0.3125	0.3189
4	0.1563	0.0992	0.1563	0.1529
5	0.0313	0.0040	0.0313	0.0281
	二項：$f(x)=C_x^5(0.5)^x(0.5)^{5-x}$ 超幾何：$f(x)=\frac{C_x^5C_{5-x}^5}{C_5^{10}}$		二項：$f(x)=C_x^5(0.5)^x(0.5)^{5-x}$ 超幾何：$f(x)=\frac{C_x^{50}C_{5-x}^{50}}{C_5^{100}}$	

例題 6.10

一批產品 $N=5{,}000$，其中有 1,000 個為不良品。若隨機取 10 個，則恰有 3 個不良品的機率為何？

解 由於樣本大小 $n=10$ 相對於母體大小 $N=5{,}000$ 小很多，故可用二項分配來逼近所要求的機率。已知 $N=5{,}000$，$S=1{,}000$，$n=10$，故二項分配之成功機率為 $p=\frac{S}{N}=\frac{1{,}000}{5{,}000}=0.2$，於是：

$$f(3)=\frac{C_3^{1,000}C_7^{4,000}}{C_{10}^{5,000}}\approx C_3^{10}(0.2)^3(0.8)^7=0.2013$$

6.3 Poisson 分配

本節將介紹另一個重要的間斷機率分配，稱為 Poisson 分配，它專門探討下列類似的問題：

1. 上午 10 點至 11 點間，每 10 分鐘打進 A 公司電話的通數。
2. 週末下午 B 停車場每 1 小時開進站內的車輛數。

著作權所有 侵害必究
華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

3. 高速公路上每 10 公里路面有窪洞的數目。
4. C 秘書小姐每打 1 頁報告出現錯誤的字數。

上述問題的共同點乃是：在一特定的**區間** (interval) 內，某事件發生的次數。處理這類的問題，便是本節所要介紹的 Poisson 分配之觀念。

6.3.1 Poisson 實驗與 Poisson 分配

在一特定區間（或區域）內，觀察某特定事件發生的次數，令其為隨機變數 X，則此項觀察過程稱為**Poisson 實驗** (Poisson experiment)。在此所指的區間其意義極為廣泛，包括：時間（每一分鐘、每一小時、每一週、每一月……）、面積、體積、距離……等等（參見上述的例子）。此外，隨機變數 X 代表某特定事件發生的次數，因此其可能值為 0, 1, 2, ⋯，而 X 稱為**Poisson 隨機變數** (Poisson random variable)。 Poisson 實驗具有下列三個性質：

1. 在特定區間內，某事件發生的平均數 λ 皆相同且為已知。例如：週末晚上（6:00～12:00 PM）平均每小時有 6 通電話打進 A 宅，則 6:30～7:30 PM 與 8:00～9:00 PM 兩個時段中，平均打進 A 宅的電話通數皆為 6 通。
2. 在一極短的區間內，某事件發生一次的機率在各極短區間內皆相同且與區間的長短（或大小）成比例，但與此區間或區間外所發生的次數無關。
3. 在一極短的區間內，僅有兩種情況，即發生一次或不發生，而發生兩次或以上的情形不予考慮。此外，在某一極短的區間內某事件是否發生，並不影響下一個極短區間內事件發生的行為；也就是說，兩個相隔極短的區間內之事件的發生乃互為獨立。

符合上述 Poisson 實驗的三個性質者，所定義的隨機變數 X（事件發生次數）其機率分配稱為**Poisson 分配** (Poisson distribution)。公式如下：

Poisson 分配

$$f(x)=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{x}}{x!}，x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots \tag{6-6}$$

式中 λ 表示在某特定區間內某事件所發生的平均次數，而 $e=2.71828$。

例題 6.11

假定到達台南市立醫院的病患人數符合 Poisson 過程，且平均每小時有 1 人到達，試問：

(a) 1 小時內沒有病患到達的機率。

著作權所有 侵害必究
華泰文化 HWA TAI PUBLISHING