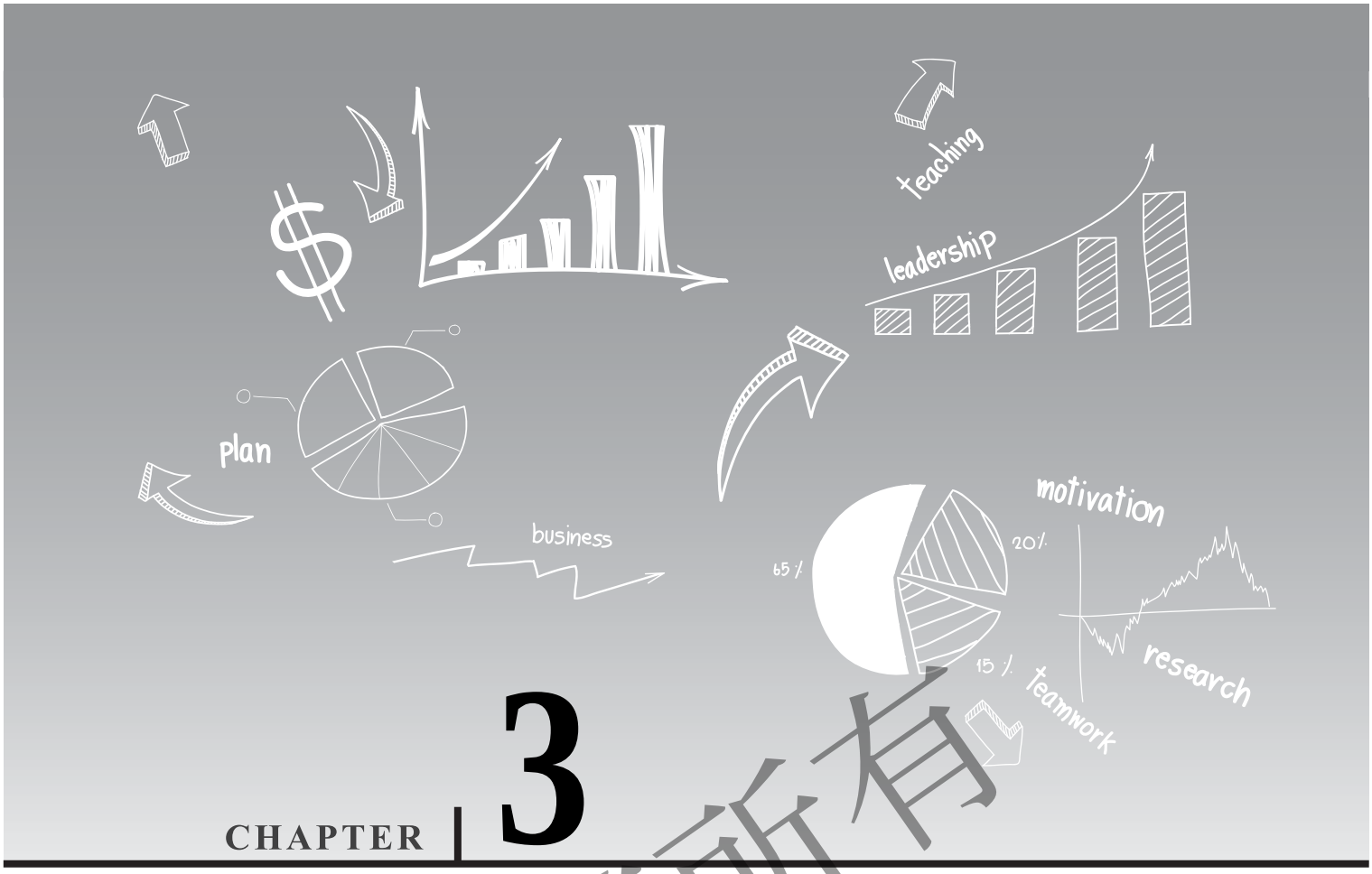


CHAPTER 3

機　率

版權所有

3.1　機率的意義
3.2　隨機實驗、樣本空間與事件
3.3　機率測度與機率法則
3.4　條件機率及獨立事件

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

3.1 機率的意義

機率論的起源甚早，但實際年代並不明確可考。自瑞士數學家 Jacques Bernoulli 在 1713 年出版了一本推理嚴密的書《猜測的藝術》(*Ars Conjectandi*) 以來，機率論成了一種用科學方法加以研究的專門學科。由於其他數學工具的配合，近年來發展迅速，已對其他科學領域的刺激和應用產生廣泛影響，尤其對統計學的發展有極大的貢獻。

在日常生活中，我們時常會面對許多不確定的問題。例如：本學期統計學成績及格的機會有多大？明天下雨的機會有多大？明天某公司的股票是否會漲？上漲的可能性多大？……。

諸如此類不確定的問題，大多可藉由機率來解決。機率是用來衡量某一現象可能發生的程度；即以 0 至 1 之間的實數值說明不確定現象發生的可能性。當發生的可能性很小時，其機率值接近 0；反之，發生的可能性很大時，其機率值接近 1。若能事先準確地估計發生的機率，則在面對此不確定情況時，即可做出適當的決策。

欲了解統計學的奧祕，就必須先對機率的概念與理論有所認識。由於統計學的主要重點是在推論統計部分，而推論統計是根據樣本資料的訊息來推論母體特徵，在樣本資料的獲取過程中將會面臨不知出現何種樣本的不確定性，此時必須借助機率的概念推導出樣本的機率分布，再藉此機率分布的特性，進一步推論母體特徵，並探討該推論的可靠性。因此，機率論實為推論統計學的基礎。

此外，對於不確定結果的決策問題，機率也是選取最適決策的重要工具。諸如，在商管領域上，業者評估選擇投資組合，壽險公司依據壽命分布及投保年齡估算保費，生產者預測產品需求量以決定產量，公司擇優決定生產方式或行銷模式……，均需依據各種可能發生的機率來做統計分析與決策。由此可知，機率與統計是息息相關的科學方法。

3.2 隨機實驗、樣本空間與事件

我們所要探討的機率問題，實際上就是討論某一種不確定結果的實驗。所謂**實驗** (experiment) 是指獲得或觀測一些現象之結果的過程。而實驗本身大致可區分為**確定性** (deterministic) 實驗與**不確定性** (indeterministic) 實驗兩類。若在給定之條

版權所有
華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

件下，所進行之實驗結果為可完全確定者，稱為確定性實驗，即在相同之條件下的實驗結果為確定且相同者；否則，稱為不確定性實驗。例如：在一大氣壓力（760毫米汞柱）下，將水溫加熱至攝氏100度，則產生沸騰，此即為一確定性實驗；而自由落體之公式：$S=\frac{1}{2}gt^2$（其中S表距離，g表重力加速度，t表經過的時間），亦為確定性實驗的模式之一。

在機率論中所討論的隨機實驗即屬不確定性實驗。此類實驗具有一共同的特性，即每次實驗時都可預知有哪些可能結果，但無法確定會出現哪一種結果，具有不確定性。例如：投擲一個銅板，我們事先可預知，不是出現正面就是出現反面，恰有這兩種可能情形；但卻不能確定是出現正面還是反面。此即為一隨機實驗。

為了更清楚地了解機率概念，我們首先定義並說明幾個相關的專有名詞。

定義 3.1

一實驗若事先不能確知會出現何種結果，但可預知所有可能出現的結果者，稱為**隨機實驗** (random experiment)。

版權所有

例如：(1) 投擲一個骰子，觀察其出現之點數。

(2) 對某地區之民眾進行意見調查。

(3) 某公司檢驗一批產品，看是否有瑕疵。

(4) 討論明天的股市行情，看是否上漲。

以上皆屬於隨機實驗的例子。

一般而言，隨機實驗滿足下列三種特性：

1. 實驗可在相同的條件下重複執行。
2. 實驗之前無法確定該次實驗會出現哪一種可能結果。
3. 實驗之所有可能出現的結果在事前即可確知。

定義 3.2

一隨機實驗之所有可能出現結果所組成的集合，稱為**樣本空間** (sample space)，通常以大寫希臘字母 Ω 表之；每一個可能出現的結果（即樣本空間內的每一個元素），稱為**樣本點** (sample point)。

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

例 3.1

(1) 投擲一個銅板一次，觀察出現的情形，則其樣本空間

$$\Omega = \{\text{正面，反面}\}\text{或寫成 } \Omega = \{H, T\}\text{，其中 } H \text{ 表正面，} T \text{ 表反面。}$$

(2) 投擲一個銅板兩次時，則其樣本空間

$$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$$

(3) 投擲一個骰子一次，觀察出現的點數，則其樣本空間

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(4) 投擲一個骰子兩次時，觀察出現的點數，則其樣本空間

$$\Omega = \{(i, j) | i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \left\{ \begin{array}{llllll} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6) \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6) \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6) \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6) \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6) \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6) \end{array} \right\}$$

(5) 重複地投擲一個銅板，直到出現正面為止，記錄投擲的總次數，則其樣本空間

$$\Omega = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$$

(6) 觀察一電子零件之使用壽命，則其樣本空間

$$\Omega = \{t | t \geq 0\}\text{，其中 } t \text{ 表壽命長。}$$

亦可以實數區間 $[0, \infty)$ 表之，即 $\Omega = [0, \infty)$。至於樣本空間是否包含使用壽命 $t = 0$ 這一點，端視此一電子零件是否為不良品。

樣本空間可視為一個集合，依其所含樣本點的個數，可區分為**有限樣本空間** (finite sample space) 與**無限樣本空間** (infinite sample space)。前者指僅含有限個樣本點的樣本空間；而後者指含有無限多個樣本點的樣本空間。

在例 3.1 中的 (1)、(2)、(3) 與 (4) 小題之樣本空間均為有限樣本空間，而 (5) 與 (6) 小題之樣本空間則為無限樣本空間。

版權所有

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING

其次，我們將介紹在機率論中測定機率值的主要對象，即在機率術語中所謂的事件，其定義如下：

定義 3.3

樣本空間的任意子集（部分集合）稱為**事件** (event)。只包含一個樣本點的事件，又稱為**簡單事件** (simple event)；而包含至少兩個樣本點的事件，稱為**複合事件** (compound event)。

根據上述定義，對於具有 n 個樣本點之有限樣本空間而言，總共有 2^n 個子集，即有 2^n 個事件，其中包含空集合 ϕ 與樣本空間 Ω 本身。空集合所代表的事件，不含任何樣本點，是不可能發生的事件，故稱為**不可能事件** (impossible event)；而事件 Ω 則包含了樣本空間內之所有樣本點，表示事件必定會發生，故稱為**必然事件** (sure event)。

例如：投擲一個銅板，其樣本空間 $\Omega = \{H, T\}$，為一有限樣本空間。樣本點個數，總共有 2 個。因此，計有 $2^2 = 4$ 個子集，即 $\phi, \{H\}, \{T\}, \{H, T\}$。

至於事件發生 (occur) 與否，又如何判定呢？若所考慮之隨機實驗出現的結果 w，是某一事件 E 所含的樣本點之一（即 $w \in E$），則稱此**事件 E 發生**；否則，稱此**事件 E 不發生**。

例如：投擲一個骰子，其樣本空間 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$。

設事件 $E = \{1, 3, 5\}$，事件 $F = \{2, 4, 6\}$。

若骰子出現的點數是 3，則稱事件 E 發生，但事件 F 不發生（因為 3 是事件 E 所含的樣本點之一，即 $3 \in E$）。而事件 E 與 F 均含有 3 個樣本點，皆為複合事件。

3.3 機率測度與機率法則

一個隨機實驗的可能結果雖為已知，但各種可能結果出現的可能性有多大？亦即各種可能結果出現的「機率」為多少？應如何測度與計算一事件發生的機率？運算規則又為何？這些問題將在本節中討論。

版權所有

華泰文化
HWA TAI PUBLISHING